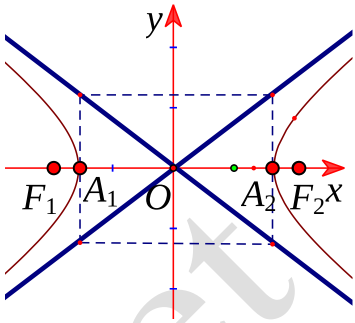
§6. ĐƯỜNG HYPEBOL

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Định nghĩa: Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c\ (c > 0)$ và hằng số $a < c$ .Hypebol là tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$. Kí hiệu (H)



Hình 3.4

Ta gọi : F_1, F_2 là *tiêu điểm* của (H). Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ là *tiêu cự* của (H).

2.Phương trình chính tắc của hypebol:

Với $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

$$M(x;y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = c^2 - a^2 \quad (2)$$

Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của hypebol

3.Hình dạng và tính chất của (H):

+ Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$

+ Các đỉnh : $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$

+ Trục Ox gọi là *trục thực*, Trục Oy gọi là *trục ảo* của hypebol. Khoảng cách 2a giữa hai đỉnh gọi là *độ dài trục thực*, 2b gọi là *độ dài trục ảo*.

+ Hypebol gồm hai phần nằm hai bên trục ảo, mỗi phần gọi là *nhánh* của hypebol

+ Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là *hình chữ nhật cơ sở*. Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai *đường tiệm cận* của hypebol và có phương trình là

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

+ Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} > 1$

+ $M \quad x_M;y_M$ thuộc (H) thì:

$$MF_1 = \left|a + ex_M\right| = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right|,\ MF_2 = \left|a - ex_M\right| = \left|a - \frac{c}{a}x_M\right|$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1. Xác định các yếu tố của hypebol khi biết phương trình chính tắc của chúng.

1.Phương pháp giải.

Từ phương trình chính tắc của hypebol ta xác định các đại lượng a,b và $b^2 = c^2 - a^2$ ta tìm được c từ đó ta suy ra được các yếu tố cần tìm.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm; tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của (H)

a) $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{8} = 1$ b) $5x^2 - 4y^2 = 20$

Lời giải:

a) Ta có $a^2 = 6,\ b^2 = 8$ nên $a = \sqrt{6},\ b = 2\sqrt{2},\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$

Do đó ta có hypebol có:

Tọa độ các đỉnh là $A_1 \quad -\sqrt{6};0 \quad ;\ A_2 \quad \sqrt{6};0$

Tiêu điểm là $F_1 \quad -10;0 \quad ;\ F_2 \quad 10;0$

Tâm sai của (H) là $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{10}{\sqrt{6}}$

Độ dài trục thực $2a = 2\sqrt{6}$, độ dài trục ảo $2b = 4\sqrt{2}$

Đường tiệm cận có phương trình là $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$

b) Viết lại phương trình (H) là: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, có $a^2=4,\ b^2=5$ nên $a=2,\ b=\sqrt{5},\ c=\sqrt{a^2+b^2}=3$

Do đó ta có hypebol có:

Tọa độ các đỉnh là $A_1\left(-2;0\right);\ A_2\left(2;0\right)$

Tiêu điểm là $F_1\left(-3;0\right);\ F_2\left(3;0\right)$

Tâm sai của (H) là $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$

Độ dài trục thực $2a=4$, độ dài trục ảo $2b=2\sqrt{5}$

Đường tiệm cận có phương trình là $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.126: Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm; tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của hypebol (H):

a) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{6}=1$ b) $9x^2-12y^2=108$

✍ DẠNG 2. Viết phương trình chính tắc của hypebol.

1. Phương pháp giải.

Để viết phương trình chính tắc của hypebol ta làm như sau:

+ Gọi phương trình chính tắc hypebol là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \left(a,b>0\right)$

+ Từ giả thiết của bài toán ta thiết lập các phương trình, hệ phương trình từ giải thiết của bài toán để tìm các đại lượng a,b của hypebol từ đó viết được phương trình chính tắc của nó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $-4;0$ và độ dài trục ảo bằng $\sqrt{28}$

b) (H) có tiêu cự bằng 10 và đường tiệm cận là $y = \pm\frac{4}{3}x$

c) (H) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48

d) (H) đi qua hai điểm $M\ \sqrt{2};2\sqrt{2}$ và $N\ -1;-\sqrt{3}$

e) (H) đi qua $M\ -2;1$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0.

Lời giải: Gọi phương trình chính tắc của (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $-4;0$ suy ra $c = 4$; độ dài trục ảo bằng $\sqrt{28}$ suy ra $2b = \sqrt{28} \Rightarrow b^2 = 7,\ a^2 = c^2 - b^2 = 9$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

b) (H) có tiêu cự bằng 10 suy ra $2c = 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ (1); đường tiệm cận là $y = \pm\frac{4}{3}x$ suy ra $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ hay $b^2 = \frac{16}{9}a^2$ (2)

Thế (2) vào (1) $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 16$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

c) Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ suy ra $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ hay $4a^2 = 9b^2$ (3)

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 24 suy ra $2a.2b = 48 \Leftrightarrow ab = 12$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a^2 = 18; b^2 = 8$

Vậy phương trình (H) là $\dfrac{x^2}{18} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

d) (H) đi qua hai điểm $M\ \ \sqrt{2};2\sqrt{2}$ và $N\ \ -1;-\sqrt{3}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a^2} - \dfrac{8}{b^2} = 1 \\ \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{2}{5} \\ b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình (H) là $\dfrac{x^2}{\frac{2}{5}} - \dfrac{y^2}{2} = 1$

e) $M\ \ -2;1\ \ \in\ \ H$ nên $\dfrac{4}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1$ (*)

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$\Delta_1 : y = \dfrac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$; $\Delta_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$ hay $bx + ay = 0$

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0 nên $\cos 60^0 = \dfrac{\left|b^2 - a^2\right|}{b^2 + a^2}$

Hay $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\left|b^2 - a^2\right|}{b^2 + a^2} \Leftrightarrow 2\left|b^2 - a^2\right| = a^2 + b^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(b^2 - a^2) = b^2 + a^2 \\ 2(b^2 - a^2) = -(b^2 + a^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 3a^2 \\ a^2 = 3b^2 \end{array}\right.$$

+ Với $b^2 = 3a^2$ thay vào (*) được $a^2 = \dfrac{11}{3}, b^2 = 11$

Suy ra phương trình hypebol là (H): $\dfrac{x^2}{\frac{11}{3}} - \dfrac{y^2}{11} = 1$

+ Với $a^2 = 3b^2$ thay vào (*) được $a^2 = 1,\ b^2 = \frac{1}{3}$

Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Vậy có có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$ và $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.127: Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có tâm sai $e = 2$, các tiêu điểm của (H) trùng với các tiêu điểm của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Độ dài trục ảo là 6 và phương trình một đường tiệm cận là $3x - 4y = 0$.

c) (H) đi qua điểm điểm A$\left(-4; \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$ và phương trình 2 đường tiệm cận là $2x \pm 3y = 0$

d) (H) đi qua điểm $M\ \ 6;3$ và góc giữa 2 đường tiệm cận bằng 60^0

e) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x \pm 5 = 0$; y ± 4=0

f) Độ dài trục ảo là 6 và hai tiệm cận vuông góc với nhau.

g) Đi qua M$\left(3; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ và 2 đường chuẩn có phương trình: $3x \pm 4 = 0$

h) Khoảng cách giữa các đường chuẩn là $\frac{32}{\sqrt{7}}$ và phương trình 2 đường tiệm cận là $3x \pm 4y = 0$

k) (H) đi qua A(1; 0) và $B\ \sqrt{3};1$

l) (H) có tiêu điểm $F_1\ -7;0$ và đi qua $M\ -2;12$

Bài 3.128: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip (E): $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình hypebol (H) có hai đường tiệm cận là $y=\pm 2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của elip (E).

- **DẠNG 3. Xác định điểm nằm trên hypebol thỏa mãn điều kiện cho trước.**

1. Phương pháp giải.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc hypebol có phương trình chính tắc là

$H\ :\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$ ta làm như sau

- Giả sử $M\ x_M;y_M$, điểm $M\in\ H\ \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2}-\frac{y_M^2}{b^2}=1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$ có tiêu điểm F_1 và F_2.

Tìm điểm M trên (H) trong trường hợp sau:

a) Điểm M có hoành độ là 4

b) Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

c) Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3

d) Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$

Lời giải

Giả sử $M\ x_M;y_M\ \in\ H$ suy ra $\dfrac{{x_M}^2}{9}-\dfrac{{y_M}^2}{6}=1\,(*)$

a) Ta có $x_M=4$ suy ra $y_M=\pm\sqrt{6\left(\dfrac{x_M^2}{9}-1\right)}=\pm\dfrac{\sqrt{42}}{3}$

$\Rightarrow M_1\left(4;\dfrac{\sqrt{42}}{3}\right);M_2\left(4;-\dfrac{\sqrt{42}}{3}\right)$

b) Từ phương trình (H) có $a^2=9,\ b^2=6$ nên

$a=3,\ b=\sqrt{6},c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15}$

Suy ra $F_1(-\sqrt{15};0);F_2(\sqrt{15};0)$

Ta có: $\overrightarrow{F_1M}=(x_M+\sqrt{15};y_M);\overrightarrow{F_2M}=(x_M-\sqrt{15};y_M)$

Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông nên

$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0\Leftrightarrow(x_M+\sqrt{15})(x_M-\sqrt{15})+y_M^2=0\Leftrightarrow y_M^2=15-x_M^2$
thế vào (*) ta được
$\dfrac{{x_M}^2}{9}-\dfrac{15-{x_M}^2}{6}=1\Leftrightarrow x_M=\pm\sqrt{\dfrac{63}{5}}$ suy ra $y_M=\pm\sqrt{\dfrac{12}{5}}$
Vậy có bốn điểm thỏa mãn là
$M_1\left(\sqrt{\dfrac{63}{5}};\sqrt{\dfrac{12}{5}}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{\dfrac{63}{5}};\sqrt{\dfrac{12}{5}}\right)$, $M_3\left(\sqrt{\dfrac{63}{5}};-\sqrt{\dfrac{12}{5}}\right)$ và

$M_4\left(-\sqrt{\dfrac{63}{5}};-\sqrt{\dfrac{12}{5}}\right)$

c) Ta có $MF_1=\left|a+\dfrac{c}{a}x_M\right|$ nên

$$3=\left|3+\frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_M=0(l)\\ x_M=\dfrac{-18}{\sqrt{15}}\Rightarrow y_M=\pm\dfrac{\sqrt{210}}{5}\end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm: $M_1\left(-\dfrac{18}{\sqrt{15}};\dfrac{\sqrt{210}}{5}\right)$ và $M_2\left(-\dfrac{18}{\sqrt{15}};-\dfrac{\sqrt{210}}{5}\right)$

d) Phương trình hai tiệm cận là : $d_1: y = \frac{\sqrt{6}}{3}x; d_2: y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ suy ra

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M - y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} + \frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M + y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} = \frac{24\sqrt{2}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M\right| + \left|\sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5} \quad **$$

Mặt khác $* \Leftrightarrow \sqrt{6}x_M - 3y_M \quad \sqrt{6}x_M + 3y_M = 54 > 0$ suy ra

(**) $\Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M + \sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5} \Leftrightarrow x_M = \pm\frac{12}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{330}}{5}$

Vậy có bốn điểm $M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{12}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$,

$M_3\left(-\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ và $M_4\left(-\frac{12}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.129: Cho (H): $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{4} = 1$ và $A\ \ 3;2$, $B\ \ 0;1$. Tìm điểm $C \in\ \ H$ sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

Bài 3.130: Cho (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Có tiêu điểm là F_1 (trái) và F_2 (phải)

a) Tìm M trên (H) với $MF_1 = 4$.

b) Tìm trên (H) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$

c) Tìm trên một nhánh của (H) hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều