§5. ĐƯỜNG ELIP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1)Định nghĩa: Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c\ (c > 0)$ và hằng số $a > c$. Elip(E) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$.

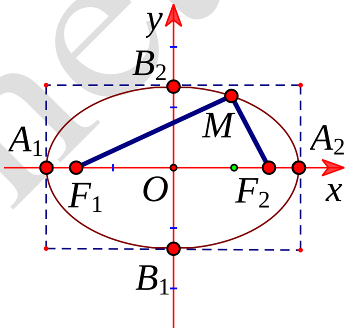
Các điểm F_1, F_2 là tiêu điểm của (E). Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự của (E). MF_1, MF_2 được gọi là bán kính qua tiêu.

2) Phương trình chính tắc của elip:

Với $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$:

$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$ trong đó $b^2 = a^2 - c^2$

(1) được gọi là phương trình chính tắc của (E)



Hình 3.3

3) Hình dạng và tính chất của elip:

Elip có phương trình (1) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

+ Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$

+ Các đỉnh : $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$

+ Trục lớn : $A_1A_2 = 2a$, nằm trên trục Ox; trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b$, nằm trên trục Oy

+ Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là *hình chữ nhật cơ sở.*

+ Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} < 1$

+ Bán kính qua tiêu điểm của điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc (E) là:

$$MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M,\ MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

✍ DẠNG 1. Xác định các yếu tố của elip khi biết phương trình chính tắc của elip.

1.Phương pháp giải.

Từ phương trình chính tắc ta xác định các đại lượng a, b và $b^2 = a^2 - c^2$ ta tìm được c elip từ đó ta suy ra được các yếu tố cần tìm.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Xác định các đỉnh, độ dài trục, tiêu cự, tiêu điểm , tâm sai của elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ b) $4x^2 + 25y^2 = 100$

Lời giải:

a) Từ phương trình của (E) ta có $a = 2,\ b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1\ -2;0\ ;\ A_2\ 2;0\ ;\ B_1\ 0;-1\ ;\ B_2\ 0;1$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 4$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 2$

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1\ -\sqrt{3};0\ ;\ F_2\ \sqrt{3};0$,

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Ta có $4x^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ suy ra

$a = 5;\ b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1\ -5;0\ ;\ A_2\ 5;0\ ;\ B_1\ 0;-2\ ;\ B_2\ 0;-2$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 10$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 4$

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{21}$, tiêu điểm là $F_1\ -\sqrt{21};0\ ;\ F_2\ \sqrt{21};0$,

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.116: Xác định các đỉnh, độ dài trục, tiêu cự, tiêu điểm , tâm sai của elip (E):

a) $x^2 + 2y^2 = 18$ b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

DẠNG 2. Viết phương trình chính tắc của đường elip.

1. Phương pháp giải.

Để viết phương trình chính tắc của elip ta làm như sau:

+ Gọi phương trình chính tắc elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ a>b>0$

+ Từ giả thiết của bài toán ta thiết lập các phương trình, hệ phương trình từ giải thiết của bài toán để tìm các đại lượng a, b của elip từ đó viết được phương trình chính tắc của nó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) (E) có độ dài trục lớn là 6 và tâm sai $e=\frac{2}{3}$

b) (E)có tọa độ một đỉnh là $0;\sqrt{5}$ và đi qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{10}}{5};-1\right)$

c) (E) có tiêu điểm thứ nhất $-\sqrt{3};0$ và đi qua điểm $M(1;\frac{4\sqrt{33}}{5})$.

d) Hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $y+2=0$ và có diện tích bằng 48.

e) (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Lời giải: Phương trình chính tắc của (E) có dạng:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ a>b>0$

a) (E) có độ dài trục lớn là 6 suy ra $2a=6 \Leftrightarrow a=3$, Tâm sai $e=\frac{2}{3}$

nên $\frac{c}{a}=\frac{2}{3} \Rightarrow c=2,\ b^2=a^2-c^2=5$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

b) (E) có một đỉnh có tọa độ là $0;\sqrt{5}$ nằm trên trục tung nên $b=\sqrt{5}$

do đó phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1 \quad a>\sqrt{5}$.

Mặt khác (E) đi qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{10}}{5};-1\right)$ nên $\frac{160}{25a^2}+\frac{1}{5}=1 \Rightarrow a^2=8$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$

c) (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$ nên $c=\sqrt{3}$ suy ra

$a^2=b^2+c^2=b^2+3$ (1)

Mặt khác $M(1;\frac{4\sqrt{33}}{5})\in(E)\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{528}{25b^2}=1$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được

$\frac{1}{b^2+3}+\frac{528}{25b^2}=1\Leftrightarrow 25b^4-478b^2-1584=0$

$\Leftrightarrow b^2=22\Rightarrow a^2=25$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{22}=1$

d) (E) có hình chữ nhật cơ sở có một cạnh nằm trên đường thẳng
$y+2=0$ suy ra $b=2$

Mặt khác hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng 48 nên $2a.2b=48\Rightarrow b=6$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

e) (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ suy ra $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ hay $4a^2=9b^2$ (3)

Hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20 suy ra $4\;\; a+b\;\; =20$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $a=3,\ b=2$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.117: Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm sai bằng $\frac{4}{5}$ và đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (E) có phương trình $x^2+y^2=34$

b) Độ dài trục lớn bằng 15, (E) đi qua M sao cho $F_1MF_2=90^\circ$ và diện tích tam giác MF_1F_2 bằng 26.

c) (E) đi qua $M\left(\frac{3\sqrt{14}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M.

d) Tiêu cự bằng 6 và đường tròn nội tiếp tam giác OF_2B_2 có bán kính bằng 1. (Với F_2 là tiêu điểm phải của (E) và B_2 đỉnh của (E) có tung độ dương).

e) (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.

f) (E) có một tiêu điểm $F_1\ -7;0$ và đi qua $M\ -2;12$

g) (E) đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ và có tiêu cự $4\sqrt{3}$

h) (E) đi qua hai điểm $M\left(3;\frac{4}{5}\right)$, $N\left(-4;\frac{3}{5}\right)$

k) (E) đi qua $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tâm sai $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

DẠNG 3. Xác định điểm nằm trên đường elip thỏa mãn điều kiện cho trước.

1. Phương pháp giải.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc elip có phương trình chính tắc là
$E \ : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \ \ a>b>0$ ta làm như sau

- Giả sử $M \ \ x_M;y_M$, điểm $M \in \ \ E \ \Leftrightarrow \dfrac{x_M^2}{a^2}+\dfrac{y_M^2}{b^2}=1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn $x_M,\ y_M$ ta tìm được tọa độ của điểm M

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho elip (E): $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có tiêu điểm F_1 và F_2.

Tìm điểm M trên (E) sao cho

a) Điểm M có tung gấp ba lần hoành độ

b) $MF_1=2MF_2$

c) $F_1MF_2=60^0$

d) Diện tích tam giác ΔOAM lớn nhất với $A \ \ 1;1$

Lời giải

Giả sử $M \ \ x_M;y_M \ \ \in \ \ E$ suy ra $\dfrac{{x_M}^2}{25}+\dfrac{{y_M}^2}{9}=1(*)$

a) Điểm M có tung gấp ba lần hoành độ do đó $y_M=3x_M$ thay vào (*) ta được $\dfrac{x_M^2}{25}+\dfrac{3x_M{}^2}{9}=1\Leftrightarrow 26x_M^2=25\Leftrightarrow x_M=\pm\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(\frac{5}{\sqrt{26}};\frac{15}{\sqrt{26}}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{\sqrt{26}};-\frac{15}{\sqrt{26}}\right)$

b) Từ phương trình (E) có $a^2 = 25,\ b^2 = 9$ nên

$a = 5,\ b = 3, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

Theo công thức tính bán kính qua tiêu điểm ta có :

$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M = 5 + \frac{4}{5}x_M \text{ và } MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M = 5 - \frac{4}{5}x_M$$

Theo giải thiết $MF_1 = 2MF_2$ suy ra $5 + \frac{4}{5}x_M = 2\left(5 - \frac{4}{5}x_M\right)$

$\Leftrightarrow x_M = \frac{25}{12}$

Thay vào (*) ta có : $\frac{25}{144} + \frac{y_M^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{119}}{4}$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là: $M_1\left(\frac{25}{12};\frac{\sqrt{119}}{4}\right)$ và $M_2\left(\frac{25}{12};-\frac{\sqrt{119}}{4}\right)$

c) Ta có $F_1\ \ -4;0\ \ ,\ F_2\ \ 4;0\ \ \Rightarrow \overrightarrow{MF_1}\ \ x_M + 4; y_M\ \ ,\ \overrightarrow{MF_2}\ \ x_M - 4; y_M$

Vì $F_1MF_2 = 60^0$ nên $\cos 60^0 = \frac{\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}}{\left|\overrightarrow{MF_1}\right|.\left|\overrightarrow{MF_2}\right|} = \frac{x_M^2 + y_M^2 - 16}{\left(5 + \frac{4}{5}x_M\right)\left(5 - \frac{4}{5}x_M\right)}$

$\Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 - 16 = \frac{1}{2}\left(25 - \frac{16}{25}x_M^2\right)$

Suy ra $\frac{x_M^2}{25} = \frac{57}{66} - \frac{y_M^2}{33}$ thế vào (*) ta được

$\frac{57}{66} - \frac{y_M^2}{33} + \frac{{y_M}^2}{9} = 1 \Rightarrow y_M = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$ và $x_M = \pm\frac{5\sqrt{13}}{4}$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là $M_1\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$,

$M_2\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_3\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ và $M_4\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

d) Ta có $\overrightarrow{OA}\ \ 1;1$ nên đường thẳng đi qua hai điểm O, A nhận $\vec{n}\ \ -1;1$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là $-x+y=0$

$$S_{OAM}=\frac{1}{2}OA.d\ \ M;OA\ \ =\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{\left|-x_M+y_M\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\left|-x_M+y_M\right|$$

Áp dụng bất đẳng thức Bnhiacốpxki ta có

$$S_{OAM}=\frac{1}{2}\left|-5.\frac{x_M}{5}+3.\frac{y_M}{3}\right|\le\frac{1}{2}.34.\left(\frac{{x_M}^2}{25}+\frac{{y_M}^2}{9}\right)=\frac{34}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $-\frac{x_M}{25}=\frac{y_M}{9}$ kết hợp với (*) ta được

$$\begin{cases} x_M=\frac{25}{\sqrt{34}} \\ y_M=-\frac{9}{\sqrt{34}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_M=-\frac{25}{\sqrt{34}} \\ y_M=\frac{9}{\sqrt{34}} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm $M_1\left(\frac{25}{\sqrt{34}};-\frac{9}{\sqrt{34}}\right)$ và $M_2\left(-\frac{25}{\sqrt{34}};\frac{9}{\sqrt{34}}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ví dụ 2: Cho elip (E) : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và $C\ \ 2;0$. Tìm A,B thuộc (E) biết A,B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

Lời giải

Giả sử $A\ \ x_0;y_0$. Vì A,B đối xứng nhau qua trục hoành nên $B\ \ x_0;-y_0$ với $y_0>0$.

Vì $A \in \ E$ nên $\dfrac{x_0^2}{4} + \dfrac{y_0^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = 1 - \dfrac{x_0^2}{4}$ (1)

Vì tam giác ABC đều nên

$AB^2 = AC^2 \Rightarrow \ -2y_0 \ ^2 = \ 2 - x_0 \ ^2 + \ -y_0 \ ^2$

$\Leftrightarrow 3y_0^2 = 4 - 4x_0 + x_0^2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có

$$3\left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right) = 4 - 4x_0 + x_0^2 \Leftrightarrow 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = \dfrac{2}{7} \end{array}\right.$$

+ Nếu $x_0 = 2$ thay vào (1) ta có $y_0 = 0$. Trường hợp này loại vì $A \equiv C$

+ Nếu $x_0 = \dfrac{2}{7}$ thay vào (1) ta có $y_0 = \pm\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

3. Bài tập luyên tập.

Bài 3.118: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip : $9x^2 + 25y^2 = 225$ có tiêu điểm F_1 và F_2 . Tìm các điểm M trên (E) sao cho

a) $\dfrac{1}{MF_1} + \dfrac{1}{MF_2} = \dfrac{4}{F_1F_2}$

b) $F_1MF_2 = 60^0$

c) Diện tích tứ giác $OHMK$ lớn nhất với H, K là hình chiếu của điểm M lên hai trục tọa độ.

Bài 3.119: Cho $A \ 0;3$. Tìm điểm B, C thuộc elip $\ E \ : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ sao cho B, C đối xứng qua trục Ox đồng thời thỏa mãn ΔABC đều.

Bài 3.120: Cho (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $\Delta: 3x+4y+24=0$. Tìm M trên (E) có khoảng cách đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 3.121: Cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ có tiêu điểm $F_1(-c;0)$.

a) Tìm $M\in(E)$ trong trường hợp sau:

i) Đoạn thẳng F_1M ngắn nhất ii) Đoạn thẳng F_1M dài nhất

b) Tìm hai điểm A, B thuộc (E) thỏa mãn $OA\perp OB$ và $S_{\Delta OAB}$ nhỏ nhất.

Bài 3.122: Cho $(C): (x+5)^2+y^2=441$; $(C'): (x-5)^2+y^2=25$. Gọi M là tâm đường tròn (C_1) di động tiếp xúc với (C), (C'). Chứng minh rằng tập hợp điểm M là elip và hãy tìm tọa độ các tiêu điểm của elip đó trong trường hợp sau:

a) (C_1) tiếp xúc trong với (C) và tiếp xúc ngoài với (C')

b) (C_1) tiếp xúc trong với (C) và (C')

Bài 3.123: Cho $(C): x^2+y^2=(a+b)^2$; $(C'): x^2+y^2=(a-b)^2\ (0<b<a)$. Các điểm A, B di động trên (C), (C') sao cho Ox là phân giác của góc AOB. Tìm tập hợp trung điểm M của đoạn thẳng AB.

Bài 3.124. Cho hình thoi $ABCD$ tâm I. Biết $A(-2;-2)$, $B(0;2)$ và tâm I thuộc đường Elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$. Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Bài 3.125: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Biết $A\left(1;-1\right)$, $B\left(-1;3\right)$ và B thuộc Elip $\left(E\right): x^2+3y^2=4$. Tính tọa độ hai đỉnh B và D của hình chữ nhật.