# ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

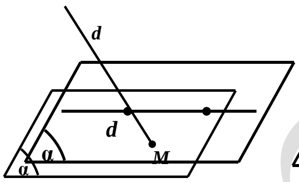
## A. CHUẨN KIẾN THỨC

### A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

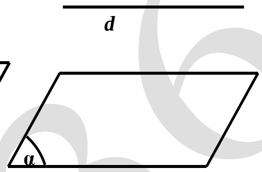
**1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.**

Cho đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$, ta có ba vị trí tương đối giữa chúng là:

- $d$ và $(\alpha)$ cắt nhau tại điểm $M$, kí hiêu $\{M\} = d \cap (\alpha)$ hoặc để đơn giản ta kí hiệu $M = d \cap (\alpha)$ (h1)
- $d$ song song với $(\alpha)$, kí hiệu $d \,//\, (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \,//\, d$ ( h2)
- $d$ nằm trong $(\alpha)$, kí hiệu $d \subset (\alpha)$ (h3)



h1 h3

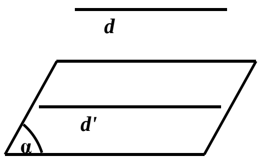


h2

**2. Các định lí và tính chất.**

- Nếu đường thẳng $d$ không nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$ và $d$ song song với đường thẳng $d'$ nằn trong $(\alpha)$ thì $d$ song song với $(\alpha)$.

Vậy $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \,//\, d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \,//\, (\alpha)$

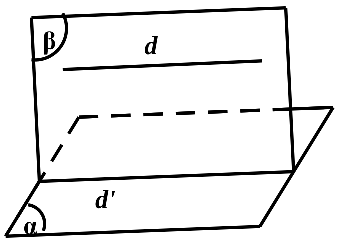


h3

- Cho đường thẳng $d$ song song với mặt phẳng $(\alpha)$. Nếu mặt phẳng $(\beta)$ đi qua $d$ và cắt $(\alpha)$ theo giao tuyến $d'$ thì $d' \,//\, d$.

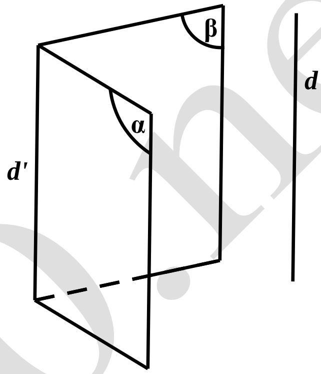
hoc360.net

Vậy $\begin{cases} d\ // \left(\alpha\right) \\ d \subset \left(\beta\right) \\ \left(\alpha\right) \cap \left(\beta\right) = d' \end{cases} \Rightarrow d'\ //\ d$.

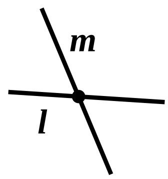


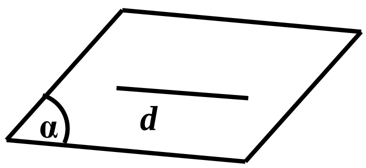

- Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng ( nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Vậy $\begin{cases} \left(\alpha\right) // \ d \\ \left(\beta\right) // \ d \\ \left(\alpha\right) \cap \left(\beta\right) = d' \end{cases} \Rightarrow d'\ //\ d$.




- 4. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



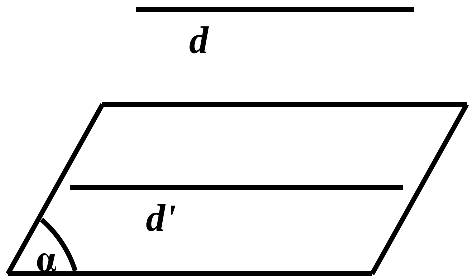

## B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI  CÁC DẠNG BÀI TẬP.

### Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG.

**Phương pháp:**

Để chứng minh đường thẳng $d$ songsong với mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ ta chứng minh $d$ song song với một đường thẳng $d'$ nằm trong $\left(\alpha\right)$.

hoc360.net




h3

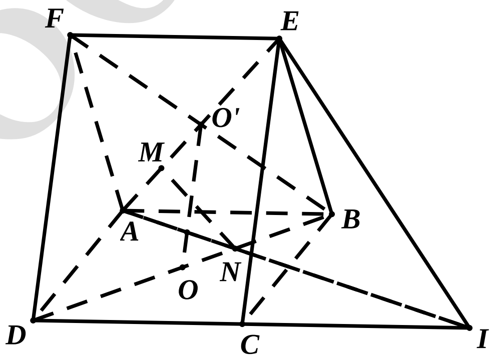
**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là $O$ và $O'$.

a) Chứng minh $OO'$ song song với các mặt phẳng $(ADF)$ và $(BCE)$.

b) Gọi $M, N$ lần lượt là hai điểm trên các cạnh $AE, BD$ sao cho $AM = \frac{1}{3}AE, BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh $MN$ song song với $(CDEF)$.

**Lời giải.**




a) Ta có $OO'$ là đường trung bình của tam giác $BDF$ ứng với cạnh $DF$ nên $OO' // DF$, $DF \subset (ADF)$

$\Rightarrow OO' // (ADF)$.

Tương tự, $OO'$ là đường trung bình của tam giác $ACE$ ứng với cạnh $CE$ nên $OO' // CE$,

$CE \subset (CBE) \Rightarrow OO' // (BCE)$.

b) Trong $(ABCD)$, gọi $I = AN \cap CD$

Do $AB // CD$ nên

$\frac{AN}{AI} = \frac{BN}{BD} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{1}{3}$.

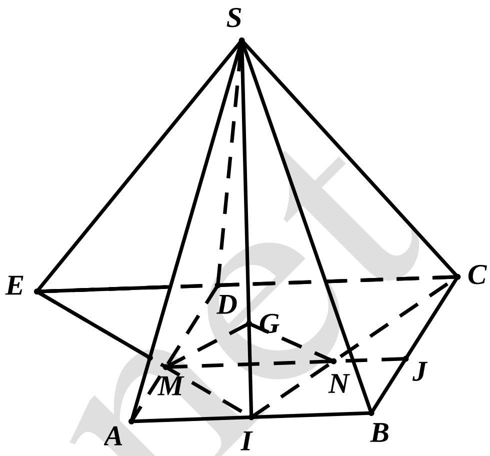
Lại có $\frac{AM}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow MN // IE$. Mà

$I \in CD \Rightarrow IE \subset (CDEF) \Rightarrow MN // (CDEF)$.

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $SAB$, $I$ là trung điểm của $AB$ và $M$ là điểm trên cạnh $AD$ sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$.

a) Đường thẳng đi qua $M$ và song song với $AB$ cắt $CI$ tại $N$. Chứng minh $NG // (SCD)$.

b) Chứng minh $MG // (SCD)$.




**Lời giải.**

a) Ta có $\frac{IN}{IC} = \frac{BJ}{BC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}, \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{IN}{IC} = \frac{IG}{IS} \Rightarrow NG // SC$,

mà $SC \subset (SCD)$

$\Rightarrow NG // (SCD)$.

b) Gọi $E$ là giao điểm của $IM$ và $CD$

Ta có $\frac{IM}{IE} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IM}{IE} = \frac{IG}{IS}$

$\Rightarrow MG // SE$, $SE \subset (SCD) \Rightarrow GM // (SCD)$.

**Bài toán 02: DỰNG THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG.**

**Phương pháp:**

Sử dụng định nghĩa và các tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Trong phần này ta sẽ xét thiết diện của mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua một điểm song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc $(\alpha)$ chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng; để xác định thiết diện loại này ta sử dụng tính chất:

$$\begin{cases} (\alpha) // d \\ d \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = d' // d, M \in d'$$

**Các ví dụ**

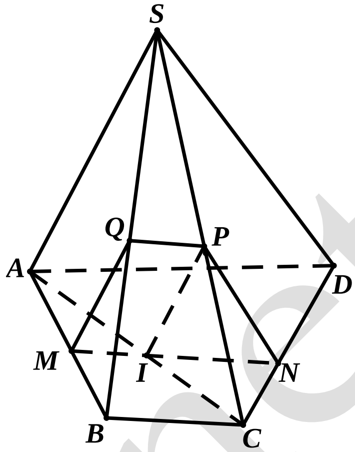
**Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$, $M$ và $N$ là hai điểm thuộc cạnh $AB$ và $CD$, $(\alpha)$ là mặt phẳng qua $MN$ và song song với $SA$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi $(\alpha)$.

b) Tìm điều kiện của $MN$ để thiết diện là một hình thang.

**Lời giải.**

a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$




$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MQ // SA, Q \in SB$.

Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap MN$

$\begin{cases} I \in MN \subset (\alpha) \\ I \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (SAC)$

Vậy $\begin{cases} I \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = IP // SA, P \in SC$

Từ đó ta có $(\alpha) \cap (SBC) = PQ, (\alpha) \cap (SAD) = NP$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang khi $MN // PQ$ hoặc $MQ // NP$.

Trường hợp 1:

Nếu $MQ // NP$ thì ta có $\begin{cases} MQ // NP \\ MQ // SA \end{cases} \Rightarrow SA // NP$

Mà $NP \subset (SCD) \Rightarrow SA // (SCD)$ (vô lí).

Trường hợp 2:

Nếu $MN // PQ$ thì ta có các mặt phẳng $(ABCD), (\alpha), (SBC)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là $MN, BC, PQ$ nên $MN // BC$.

Đảo lại nếu $MN // BC$ thì $\begin{cases} MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ PQ = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow MN // PQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Vậy để tứ giác $MNPQ$ là hình thang thì điều kiện là $MN // BC$.

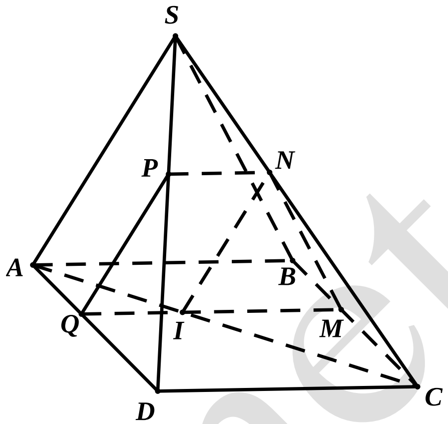
**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh $a$ và tam giác $SAB$ đều. Một điểm $M$ thuộc cạnh $BC$ sao cho $BM = x$ $(0 < x < a)$, $(\alpha)$ mặt phẳng đi qua $M$ song song với $SA$ và $SB$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $(\alpha)$.

b) Tính diện tích thiết diện theo $a$ và $x$.

**Lời giải.**

a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SBC) \\ (\alpha) // SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases}$




$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = MN // SB,$

$N \in SC$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = NI // SA, I \in AC$

Trong $(ABCD)$ gọi $Q = MI \cap AD$, thì ta có

$\begin{cases} Q \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = QP // SA, P \in SD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Do $MN // SB \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CS}$ $(1)$

Lại có $IN // SA \Rightarrow \frac{CI}{CA} = \frac{CN}{CS}$ $(2)$. Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $\frac{CM}{CB} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow IM // AB$

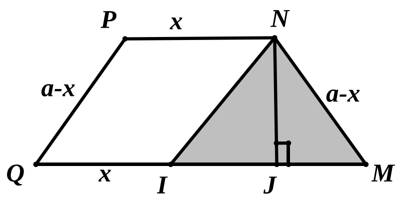
Mà $AB // CD \Rightarrow IM // CD$.

Ba mặt phẳng $(\alpha),(ABCD)$ và $(SCD)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là $MQ, CD, NP$ với $MQ // CD \Rightarrow MQ // NP$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang.

Ta có $\frac{MN}{SB} = \frac{CM}{CB} = \frac{DQ}{DA} = \frac{PQ}{SA}$, mà $SA = SB = a \Rightarrow MN = PQ$. Do đó $MNPQ$ là hình thang cân.

Từ $\frac{MN}{SA} = \frac{CM}{CB} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = a - x$,




$\frac{PN}{DC} = \frac{SN}{SC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow PN = BM = x$,

$\frac{IM}{AB} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow IM = CM = a - x$

Gọi $J$ là trung điểm của $IM$ thì

$$NJ = \sqrt{MN^2 - MJ^2} = \sqrt{(a-x)^2 - \left(\frac{a-x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}NJ(MQ + NP) = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)(a+x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2).$$

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**31.**Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $BC$; $G_1,G_2$ tương ứng là trọng tâm các tam giác $SAB,SBC$.

a) Chứng minh $AC//(SMN)$.

b) $G_1G_2//(SAC)$.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(BG_1G_2)$.

**32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh $SA,SB,AD$ lần lượt lấy các điểm $M,N,P$ sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{PD}{AD}$.

a) Chứng minh $MN//(ABCD)$.

b) $SD//(MNP)$.

c) $NP//(SCD)$.

**33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng qua $O$, song song với $AB$ và $SC$.

**34.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $AB$. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng $(\alpha)$ qua $M$, song song với $BD$ và $SA$.

**35.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $M,N$ là hai điểm bất kì trên hai cạnh $SB$ và $CD$, $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $MN$ và song song với $SC$.

Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $(\alpha)$.

**36.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $O,O'$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $ABC$ và $ABD$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để

a) $OO'//(BCD)$ là $\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}$.

b) $OO'//(CBD)$ và $OO'//(ACD)$ là $BC=BD$ và $AC=AD$.

**37.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm của $SC$; $(\alpha)$ là mặt phẳng qua $AM$ và song song với $BD$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi $(\alpha)$.

b) Gọi $E,F$ lần lượt là giao điểm của $(\alpha)$ với các cạnh $SB,SD$. Tính các tỉ số $\frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SBC}};\frac{S_{\Delta SMF}}{S_{\Delta SCD}}$.

c) Gọi $K=ME\cap CB, J=MF\cap CD$. Chứng minh $A,K,J$ nằm trên một đường thẳng song song với $EF$.

**38.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn $AB$. Gọi $M,N$ theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác $SCD$ và $SAB$.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng : $(ABM)$ và $(SCD)$; $(SMN)$ và $(ABC)$.

b) Chứng minh $MN // (ABC)$.

c) Gọi $d$ là giao tuyến của $(SCD)$ và $(ABM)$ còn $I,J$ lần lượt là các giao điểm của $d$ với $SD,SC$. Chứng minh $IN // (ABC)$.

d) Tìm các giao điểm $P,Q$ của $MC$ với $(SAB)$, $AN$ với $(SCD)$. Chứng minh $S,P,Q$ thẳng hàng.

**39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. $M$ là một điểm di động trên cạnh $SC$, $(\alpha)$ là mặt phẳng qua $AM$ và song song với $BD$.

a) Chứng minh $(\alpha)$ luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Tìm các giao điểm $H,K$ của $(\alpha)$ với $SB,SD$. Chứng minh $\frac{SB}{SH}+\frac{SD}{SK}-\frac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

b) Thiết diện của hình chóp với $(\alpha)$ có thể là hình thang được không?

**40.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a, BC=AD=b, AC=BD=c$ với. Một mặt phẳng $(\alpha)$ song song với hai đường thẳng $AB$ và $CD$ cắt các cạnh của của tứ diện theo một thiết diện là hình thoi. Tính diện tích của thiết diện.

**41.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a$. $M$ và $P$ là hai điểm di động trên các cạnh $AD$ và $BC$, sao cho $MA=PC=x$, $(0<x<a)$. Một mặt phẳng qua $MP$ song song với $CD$ cắt tứ diện theo một thiết diện.

a) Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b) Tìm $x$ để diện tích thiết diện nhỏ nhất.

**42.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Một mặt phẳng $(\alpha)$ thay đổi đi qua $AB$ và cắt $SC,SD$ tại $M,N$.

a) Tứ giác $ABMN$ là hình gì?

b) Chứng minh giao điểm $I$ của $AM$ và $BN$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

c) Chứng minh giao điểm $K$ của $AN$ và $BM$ luôn thuộc một đường thẳng cố định và $\frac{AB}{MN}-\frac{BC}{SK}$ không đổi.

**43.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $I$ là trung điểm của cạnh $B'C'$.

a) Chứng minh $AB' // (A'IC)$.

b) $M$ là một điểm thuộc cạnh $A'C'$, $AM \cap A'C=P, B'M \cap A'I=Q$. Chứng minh $PQ // AB'$. Tìm vị trí của $M$ để $S_{\Delta A'PQ}=\frac{2}{9}S_{\Delta A'CI}$.

**44.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. $I,G,K$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC$, $ACC'$ và $A'B'C'$ .Chứng minh

a) $IG // (ABC')$.

b) $GK // (BB'C'C)$.

**45.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a$. $I$ là trung điểm của cạnh $AC$, $J$ là điểm tuộc cạnh $AD$ sao cho $AJ = 2JD$. $M$ là một điểm di động trong tam giác $BCD$ sao cho $(MIJ) // AB$.

a) Tìm tập hợp điểm $M$.

b) Tính diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi $(MIJ)$.

hoc360.net