ii. $p = 3 \Rightarrow A = n^4 + 4n^2$. Do đó

$$(n^2+1)^2 < A < (n^2+2)^2.$$

Do đó, A không phải là một số chính phương.

TH2. $p - 1 \geq 4 \Rightarrow p \geq 5$.

Ta có

$$A = n^4 + 4n^{p-1} = n^4\left(1 + 4n^{p-5}\right)$$

A là một số chính phương nên suy ra $1 + 4n^{p-5} = m^2$.

Suy ra m lẻ $\Rightarrow m = 2k+1, k \in \mathbb{Z}^*$ (do $n \neq 0$ nên $m \neq 1$).

Khi đó $1 + 4n^{p-5} = m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^{p-5} = k(k+1)$ (vô lý do $k.(k+1)$ không thể biểu diễn thành lũy thừa của 1 số nguyên).

Vậy không có số nguyên n thỏa yêu cầu bài toán. ■

Bài 3

Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{x^2+y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2+y^2)}.$$

Phân tích. Yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của P tức là ta cần tìm giá trị $A \in \mathbb{R}$ nào đó mà $P \geq A, \forall x, y$. Nhận xét trong P vai trò của x, y như nhau, ta cũng có thể dễ thấy điểm rơi của bài toán là $x = y$, khi đó, $P = \dfrac{9}{2}$.

Do x, y là hai số thực dương nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy. Ta có một vài bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}.$$

Nếu áp dụng đơn thuần các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2+y^2)} \geq 4$$

thì sẽ bị ngược chiều. Do đó, ta tập trung khai thác riêng lẻ $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ và $\sqrt{2(x^2+y^2)}$ theo một hướng khác.

Ta có $x^2+y^2 \geq 2xy$ suy ra $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$ là một bình phương của một tổng nên có thể đưa ra ngoài căn thức. Hơn nữa, khi kết hợp với $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ sẽ được $\dfrac{(x+y)^2}{xy} = \dfrac{x^2+y^2}{xy} + 2$

có vẻ liên quan tới hạng tử thứ nhất $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Hơn nữa $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ và $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ là nghịch đảo của nhau, do đó, nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số này sẽ được tổng của chúng lớn hơn một hằng số là một yêu cầu khi muốn dùng bất đẳng thức Cauchy để tìm GTLN hay GTNN.

Lời giải. Ta có $x^2+y^2 \geq 2xy$ suy ra $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$. Do đó

$$\begin{aligned}
P =& \frac{xy}{x^2+y^2} + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2+y^2)} \\
\geq& \frac{xy}{x^2+y^2} + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y) \\
\geq& \frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{xy} + 2 \\
\geq& \frac{4xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{xy} + 2 - \frac{3xy}{x^2+y^2} \\
\geq& 2\sqrt{4} + 2 - \frac{3(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} \\
\geq& 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x^2+y^2 = 2xy \\ \dfrac{4xy}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{9}{2}$ khi và chỉ khi $x = y$. ■

Bình luận. Khi chứng minh một bất đẳng thức hoặc tìm GTLN, GTNN của một biểu thức, ta thường rất hay gặp phải trường hợp "ngược chiều" như phân tích ở trên.

Việc xác định được điểm rơi của bài toán sẽ đem lại nhiều lợi ích cho việc tìm hướng giải bài toán.

Chẳng hạn, khi phân tích tới $P \geq \dfrac{xy}{x^2+y^2} + \dfrac{x^2+y^2}{xy} + 2$, nếu không chú ý đến điểm rơi, ta dễ mắc sai lầm khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ và $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ và suy ra $P \geq 2\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{xy}.\dfrac{xy}{x^2+y^2}} + 2 = 4$. Tuy nhiên, dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{xy} \Leftrightarrow xy = x^2+y^2 \quad (\text{ vô lý}).$$

Với điểm rơi là $x = y$, khi đó $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{x^2+y^2}{xy} = 2$ suy ra $\dfrac{4xy}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ nên ta sẽ phân tích P sao cho xuất hiện $\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$ và $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số này.

Bài tập tương tự.

1. Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3+y^3}{x^2y^2} + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x^2+y^2) - \frac{2\sqrt{2}xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Phạm Quốc Sang - SV DHSP TPHCM

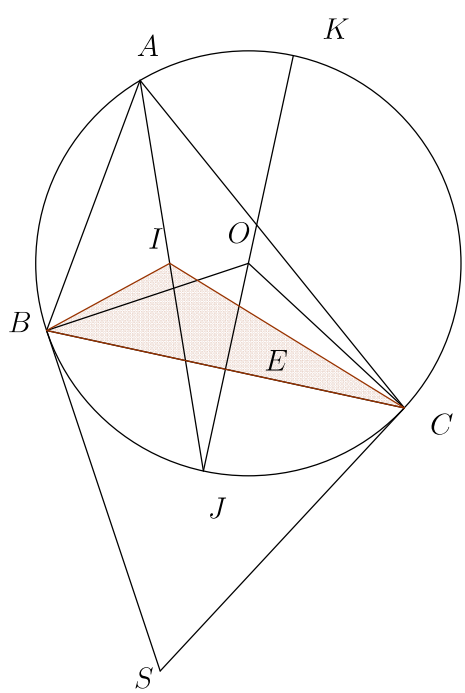
Bài 4

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt (O) tại J khác A. Đường thẳng JO cắt (O) tại K khác J và cắt BC tại E.

a) Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC và $JE.JK = JI^2$.

b) Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $SJ.Ek = SK.EJ$.

c) Đường thẳng SA cắt (O) tại D khác A, đường thẳng DI cắt (O) tại M khác D. Chứng minh rằng JM đi qua trung điểm của đoạn thẳng IE.



Lời giải. **Câu a)** Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $\widehat{BAJ} = \widehat{JAC}$. Do đó, số đo cung BJ bằng số đo cung JC, suy ra $BJ = JC$. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BIJ} &= \widehat{BAJ} + \widehat{ABI}\\ &= \widehat{CAJ} + \widehat{IBC} \quad \text{(do } I \text{ là tâm đường tròn nội tiếp)}\\ &= \widehat{JBC} + \widehat{IBC} \quad \text{(do } \widehat{JBC} \text{ và } \widehat{IBC} \text{ cùng chắn cung } JC)\\ &= \widehat{JBI}\end{aligned}$$

Do đó, tam giác JBI cân tại J, suy ra $JB = JI$.

Vậy $JB = JI = JC$, hay J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

Chứng minh $JE.IK = JI^2$

Ta có $BJ = JC$ (cmt) nên $OJ \perp BC$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào ΔJBK vuông tại B có BE là đường cao, ta được

$$JI^2 = BJ^2 = JE.JK$$

Câu b) Trước tiên, ta chứng minh S, J, K thẳng hàng.

Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S suy ra $SO \perp BC$. Do đó, S, O, J thẳng hàng (SO, JO cùng vuông góc với BC), suy ra S, J, K thẳng hàng.

Xét ΔSJB và ΔSBK có

$$\begin{aligned}&\widehat{BSJ} \quad \text{chung}\\ &\widehat{SBJ} = \widehat{SKB} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến, dây cung và góc chắn cung)}\end{aligned}$$

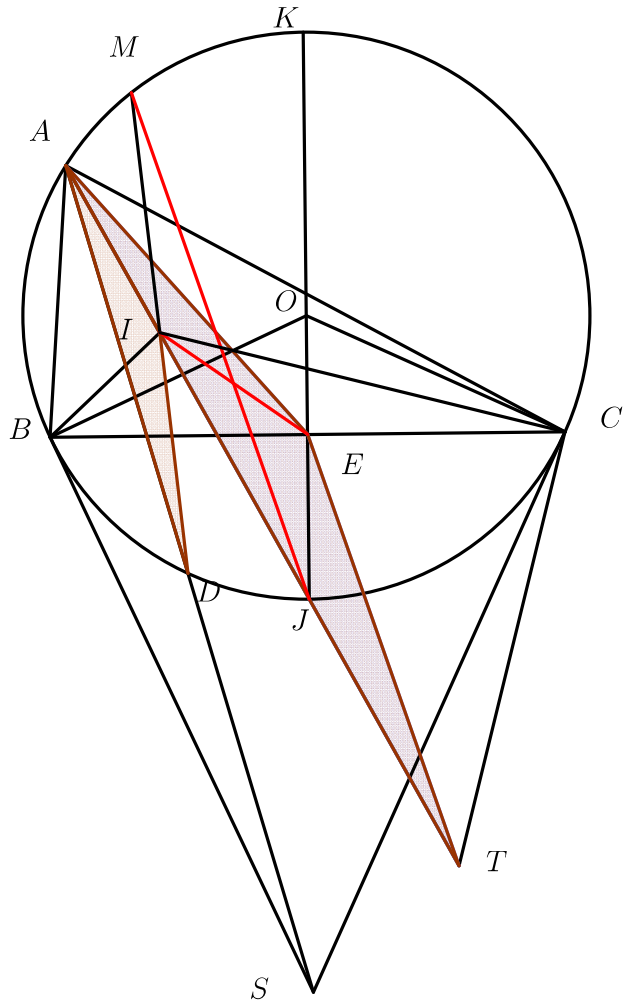
Do đó

$$\begin{aligned}&\Delta SJB = \Delta SBK \quad (g-g)\\ &\Rightarrow \frac{SB}{SJ} = \frac{SK}{SB} \Leftrightarrow SB^2 = SJ.SK\end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có $BE^2 = JE.EK$

Ta có $BE \perp SE$ suy ra

$$\begin{aligned}SE^2 &= SB^2 - BE^2\\ (SJ + JE)^2 &= SJ.SK - JE.EK\\ JE^2 + JE.EK + SJ.JE &= SJ.SK - SJ^2 - SJ.JE\\ JE(JE + EK + SJ) &= SJ(SK - SJ - JE)\\ JE.SK &= SJ.EK \quad \text{(đpcm)}\end{aligned}$$



Câu c.

Gọi T là tâm đường tròn bàng tiếp góc A.

Dễ thấy J là trung điểm của IT.

Xét ΔATC và ΔABI có

$$\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$$
$$\widehat{ACT} = \widehat{AIB}(= 90^0 + \widehat{ACI})$$

Do đó $\Delta BAI \sim \Delta IAC$ (g-g)

Suy ra $AI.AT = AB.AC$ (1)

Ta cũng chứng minh được $\Delta AEC \sim \Delta ABD$, suy ra $AB.AC = AE.AD$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $AI.AT = AE.AD$. Do đó, $\Delta AID \sim \Delta AET$ (c-g-c).

Suy ra $\widehat{ATE} = \widehat{ADI} = \widehat{AJM}$.

Suy ra $JM \parallel ET$, mà J là trung điểm của IT, nên IM đi qua trung điểm của IE. ■

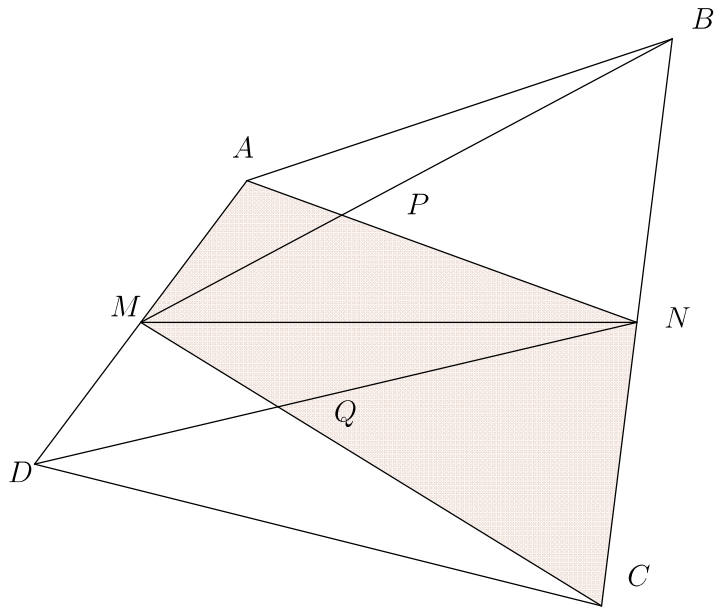
Bình luận. Mấu chốt của bài toán là điểm T.

Đây là một bài hình khó, rất hay và sáng tạo, đòi hỏi học sinh phải có khả năng nhìn, phân tích hình rất tốt, sử dụng tốt các tam giác đồng dạng. Với áp lực về thời gian, đây quả thật là một chướng ngại vật lớn của các sĩ tử.

Bài 5

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC; AN cắt BM tại P và DN cắt CM tại Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{NA}{NP} + \frac{ND}{NQ} + \frac{MB}{MP} + \frac{MC}{MQ}.$$



Phân tích. Rõ ràng biểu thức là tổng các tỷ lệ độ dài, nó làm ta lập tức nghĩ tới các tam giác đồng dạng để tìm các cạnh tỷ lệ. Tuy nhiên, theo giả thiết bài toán, ngoài $MA = MD$ và $NB = NC$, ta không tìm thêm được bất kì mối quan hệ nào khác giữa các cạnh $NA, NP, ND, NQ, ...$, cũng không có yếu tố nào về góc để tìm và chứng minh các tam giác đồng dạng, bài toán có vẻ rơi vào bế tắc, nên ta cần biến đổi tỷ lệ độ dài thành tỷ lệ của một đại lượng khác.

Nếu ta chú ý sẽ dễ thấy rằng, ta cần tính tỷ lệ $\dfrac{NA}{NP}$ và N, A, P thẳng hàng, nên với một điểm bất kì không thẳng hàng với N, A, P tạo thành hai tam giác có đáy lần lượt là NA và NP thì hai tam giác này sẽ có chung đường cao. Khi đó, nếu áp dụng: *Tỷ lệ diện tích của hai tam giác có chung đường cao bằng tỷ lệ hai đáy,* ta có thể chuyển tỷ lệ độ dài hai

cạnh thành tỷ lệ diện tích của hai tam giác. Tương tự cho các tỷ lệ còn lại.

Tới đây, ta nhận thấy từ giả thiết M, N là trung điểm của AD và BC, ta có rất nhiều cặp tam giác có diện tích bằng nhau, nên hướng đi trên có vẻ khả quan.

Cũng do giả thiết bài toán nên khi biến đổi tỷ lệ độ dài thành tỷ lệ diện tích, ta cố gắng đưa về tỷ lệ diện tích của các hình có cạnh hay đỉnh liên quan tới M, N, AD, BC càng nhiều càng tốt, để có thể khai thác được triệt để giả thiết bài toán.

Lời giải. Ta có

$$\frac{NA}{NP} = \frac{S_{\Delta MNA}}{S_{\Delta MNP}} = \frac{S_{\Delta BNA}}{S_{\Delta BNP}} = \frac{S_{ABNM}}{S_{\Delta BMN}}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{ND}{NQ} = \frac{S_{CDMN}}{S_{\Delta CMN}}, \qquad \frac{MB}{MP} = \frac{S_{ABNM}}{S_{\Delta AMN}}, \qquad \frac{MC}{MQ} = \frac{S_{CDMN}}{S_{\Delta DMN}}.$$

Do M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC nên $S_{CMN} = S_{BMN}$ và $S_{DMN} = S_{AMN}$. Do đó

$$\begin{aligned} S &= \frac{NA}{NP} + \frac{ND}{NQ} + \frac{MB}{MP} + \frac{MC}{MQ} \\ &= \frac{S_{ABNM}}{S_{\Delta CMN}} + \frac{S_{CDMN}}{S_{\Delta CMN}} + \frac{S_{ABNM}}{S_{\Delta AMN}} + \frac{S_{CDMN}}{S_{\Delta AMN}} \\ &= S_{ABCD}\left(\frac{1}{S_{\Delta AMN}} + \frac{1}{S_{\Delta CNM}}\right) \\ &\geq \frac{4S_{ABCD}}{S_{\Delta AMN} + S_{\Delta MN}}. \end{aligned}$$

Ta có $S_{\Delta AMN} + S_{\Delta BMN} = S_{\Delta ANC} + S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}\left(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}\right) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Do đó $S \geq 8\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCD}} = 8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta CMN} \Leftrightarrow AB \parallel MN \parallel CD \Leftrightarrow$ tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất là 8 khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$.

■

Bình luận. Mấu chốt của bài toán là cần biến đổi từ tỷ lệ độ dài về tỷ lệ diện tích. Đây là một bài toán hay và sáng tạo, đòi hỏi học sinh có kinh nghiệm, khả năng phân tích đề và hình vẽ để có hướng đi đúng, đồng thời là khả năng quan sát, phân tích hình vẽ tốt để tìm được các tam giác có diện tích bằng nhau.

Đề thi này có sự phân loại thí sinh tốt và nghiêng về các kĩ năng giải một bài hình học khi có phần đại số tương đối dễ và phần hình học khó.