Bài 4

a) Nam kể với Bình rằng ông của Nam có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ được chia thành bốn phần; hai phần (gồm các hình vuông $AMIQ$ và $INCP$ với M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA) để trồng các loại rau sạch, các phần còn lại trồng hoa. Diện tích phần trồng rau sạch là 1200 m^2 và phần để trồng hoa là 1300 m^2. Bình nói: "Chắc chắn bạn bị nhầm rồi!". Nam: "Bạn nhanh thật! Mình đã nói nhầm phần diện tích. Chính xác là phần trồng rau sạch có diện tích 1300 m^2, còn lại 1200 m^2 trồng hoa". Hãy tính cạnh hình vuông $AMIQ$ (biết $AM < MB$) và giải thích vì sao Bình lại biết Nam bị tính nhầm?

b) Lớp $9T$ có 30 bạn, mỗi bạn dự định đóng góp mỗi tháng 70000 đồng và sau 3 tháng sẽ đủ tiền mua tặng cho mỗi em ở "Mái ấm tình thương X" ba gói quà (giá tiền các món quà đều như nhau). Khi các bạn đóng đủ số tiền như dự trù thì "Mái ấm tình thương X" đã nhận chăm sóc thêm 9 em và giá tiền của mỗi món quà lại tăng thêm 5% nên chỉ tặng được mỗi em hai gói quà. Hỏi có bao nhiêu em của "Mái ấm tình thương X" được nhận quà?

Phân tích. Đây là dạng toán "Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình" và 2 bài toán bên trên khá hay thiên hướng về các dạng toán thực tế.

a) Ở bài toán này, không khó để có thể tạo ra một hệ phương trình từ giải thiết đó. Thật vậy, với cách chia đất như thế sẽ tạo ra 4 mảnh đất (hai mảnh đất hình vuông và hai mảnh đất hình chữ nhật có diện tích như nhau). Nếu đặt x, y lần lượt là độ dài cạnh của hai hình vuông thì ta hoàn toàn có thể suy ra được độ dài các cạnh của hình chữ nhật. Từ đó, suy ra diện tích của mảnh đất trồng rau và mảnh đất trồng hoa.

   Tiếp theo ta giải quyết câu hỏi "Vì sao Bình lại biết Nam bị tính nhầm?". Đây là câu hỏi hay nhưng không khó, chỉ việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ ra.

b) Ở bài toán này, ta có thể giải quyết theo hai hướng, đó là "Lập hệ" hay "lập phương trình".

   Hướng 1. Nếu ta đặt x là số tiền mỗi món quà ban đầu và y là số em trong mái ấm tình thương ban đầu. Khi đó, số tiền tiêu tốn khi mua quà cho các em sẽ là

$$3xy = 2(1 + 0,05)x(y + 9) = 3.30.70000.$$

   Từ đó, ta có thể tìm ra x, y và kết luận.

Hướng 2. Nếu đặt x là số em trong mái ám tình thương thì khi đó

- Số tiền mỗi món quà ban đầu là $\dfrac{3.30.70000}{3x}$ (đồng).
- Số tiền mỗi món quà lúc sau là $\dfrac{3.30.70000}{2(x+9)}$ (đồng).

Với giả thiết, mỗi món quà lúc sau tăng 5% so với mỗi món quà ban đầu, ta có phương trình

$$\frac{3.30.70000}{3x} \cdot (1+0,05) = \frac{3.30.70000}{2(x+9)}.$$

Việc tìm ra x không quá khó. Tuy nhiên đó không phải là kết quả cuối cùng, phải tính thêm 9 em học sinh mới chuyển vào.

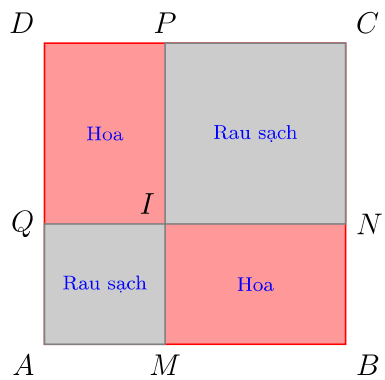
Tuy nhiên, tôi sẽ chọn cách thứ nhất để giải chi tiết!

Lời giải. a) Đặt $AM = x(\text{m})$ và $CP = y(\text{m})$. Điều kiện $x, y > 0$.

Khi đó, diện tích trồng rau sạch là $x^2 + y^2(\text{m}^2)$ và diện tích trồng hoa là $2xy(\text{m}^2)$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} x^2+y^2=1300 \\ 2xy=1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1300 \\ xy=600. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=50 \\ xy=600. \end{cases}$$



Theo định lý Viète đảo ta được $\left[\begin{array}{l} x=20, y=30 \\ x=30, y=20. \end{array}\right.$

Mặt khác, do $AM < MB$ hay $AM < CP$ nên $0 < x < y$. Do đó $x = 20(\text{m})$ và $y = 30(\text{m})$. Vậy cạnh hình vuông $AMIQ$ là 20 m.

Bình biết Nam tính nhầm có thể do Bình đã vậy dụng bất đẳng thức Cauchy $x^2+y^2 \geq 2xy$, tức diện tích phần trồng rau sạch lớn hơn diện tích phần trồng hoa.

b) Gọi x (đồng) là giá tiền mỗi món quà ban đầu và y (em) là số trẻ ban đầu của "Mái ấm tình thương X". Điều kiện $x, y > 0, y \in \mathbb{N}$.

- Ban đầu, để mua cho mỗi em ở "Mái ấm" ba gói quà tốn $3xy$ đồng.
- Thực tế, để mua cho mỗi em ở "Mái ấm" 2 gói quà tốn $2\,(1+0,05)\,x(y+9) = \dfrac{21}{10} \cdot xy + \dfrac{189}{10} \cdot x$ đồng.
- Số tiền các bạn lớp $9T$ có sau ba tháng đóng góp là $3.30.70000 = 6300000$ đồng.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} 3xy = 6300000 \\ \dfrac{21}{10} \cdot xy + \dfrac{189}{10} \cdot x = 6300000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100000 \\ y = 21, \end{cases} \quad (\text{thỏa } x, y > 0, y \in \mathbb{N}).$$

Vậy "Mái ấm tình thương X" có tất cả $21 + 9 = 30$ em. ■

Bình luận. Đây là bài toán khá hay, tuy nhiên theo tôi nghĩ, nếu thay từ "đủ" ở bài toán b) thành từ "vừa đủ", bài toán sẽ hoàn chỉnh hơn. Bởi lẽ, chúng ta có dư tiền thì ta vẫn đủ tiền để mua quà, nhưng như vậy bài toán quá phức tạp đối với học sinh và có lẽ ý đồ của tác giả cũng chỉ ở mức độ như thế.

Bài tập tương tự.

1. Ông An định cải tạo một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng $2,5$ chiều rộng. Ông thấy nếu đào một cái hồ là hình chữ nhật thì sẽ chiếm mất 3% diện tích mảnh vườn, còn nếu giảm chiều dài $5m$ và tăng chiều rộng $2m$ thì mặt hồ là hình vuông và diện tích mặt hồ giảm được $20m^2$. Hãy tính các cạnh của mảnh vườn.

   Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

2. Lớp $9A$ có 27 học sinh nam và có 18 học sinh nữ. Nhân dịp sinh nhật của bạn X (là một thành viên của lớp), các bạn trong lớp có rất nhiều món quà tặng X. Ngoài ra mỗi bạn nam của lớp làm 3 tấm thiệp và mỗi bạn nữ xếp 2 hoặc 5 con hạc để tặng bạn X. Biết số tấm thiệp và số con hạc bằng nhau, hỏi bạn X là nam hay nữ?

   Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

Bài 5

Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) tâm O, bán kính R; $\widehat{BAC} = 120°$, $\widehat{ABC} = 45°$, H là trực tâm. AH, BH, CH lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.

a) Tính AC theo R. Tính số đo góc $\widehat{HPN}$ và $\dfrac{MP}{MN}$.

b) Dựng đường kính AD; HD cắt (T) tại E $(E \neq D)$ và cắt BC tại F. Chứng minh các điểm A, N, H, P, E cùng thuộc một đường tròn và F là trung điểm của HD.

c) Chứng minh $AD \perp NP$. Tia OF cắt (T) tại I, chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và AI qua trung điểm của MP.

Phân tích. a) Với câu a) có khá nhiều cách để tìm ra được độ dài cạnh AC, đơn giản nhất vẫn là áp dụng định lý sin. Ngoài ra, có thể xét tam giác vuông cân ACD, cũng sẽ tìm được độ dài AC.

Việc tìm ra số đo góc HPN cũng nhiều hướng đi. Chủ yếu là vận dụng các tứ giác nội tiếp và góc nội tiếp. Tôi xin nêu ra một vài hướng đi

- Dùng tứ giác nội tiếp $HPAN$ có $\widehat{HPN} = \widehat{HAN} = \widehat{MAC}$, (đối đỉnh). Việc tiếp theo là tìm số đo góc MAC. Khá là dễ dàng, tam giác ABM vuông cân tại M nên $\widehat{BAM} = 45^\circ$. Từ đó, $\widehat{MAC} = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.
- Dùng tứ giác nội tiếp $NPCB$ có $\widehat{NPB} = \widehat{NCB} = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Mục đích ta tìm số đo góc NPB là bởi $\widehat{HPA} = 90^\circ$, nghĩa là $\widehat{HPN} = 90^\circ - \widehat{NPA} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.
- Cách trong lời giải...

Việc tìm tỷ số $\dfrac{MP}{MN}$ ta lại tiếp tục áp dụng định lý sin trong tam giác MNP. Việc còn lại là tìm ra số đo góc MPN và MNP. Điều này khá đơn giản!

b) Để chứng minh 5 điểm A, N, H, P, E cùng thuộc đường tròn thì ta chỉ cần chứng minh thêm điểm E thuộc đường tròn ngoại tiếp 4 điểm A, N, H, P. Điều này suy ra từ tam giác AEH vuông nên nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Để chứng minh F là trung điểm HD, ta sẽ chứng minh tứ giác $HCDB$ là hình bình hành bằng cách chứng minh $HB \parallel CD$ và $CH \parallel BD$.

c) Nhận thấy $AD \perp CO$, nên việc chứng minh $AD \perp NP$ quy về việc chứng minh $CO \parallel NP$. Để ý một chút, tứ giác $NPCB$ nội tiếp nên $\widehat{PNC} = \widehat{PBC} = 45^\circ = \widehat{ACO}$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Rõ ràng, $IB = IC$ nên để chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC ta chỉ việc chứng minh thêm $IH = IB$ hay $IH = IC$ hay IH bằng với một giá trị thay thế nào đó cũng bằng với IB, IC. Thật vậy, ta có thể chứng minh $IH = IB = IC = R$ thông qua tính chất hình bình hành $OHID$.

Để chứng minh AI đi qua trung điểm MP ta chỉ cần chứng minh được $AMIP$ là hình bình hành. Rõ ràng, đã có $AM \parallel IP$ nên chỉ cần chứng minh thêm $AM = IP$ là xong. Để chứng minh điều này, ta cần chứng minh $HM = OP$ và $AH = OI$ thông qua việc xét các hình bình hành $HMOP$ và $AHIO$.

Lời giải. a) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta được

$$\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = 2R \Leftrightarrow AC = 2R\sin\widehat{ABC} = 2R\sin 45^\circ = R\sqrt{2}.$$

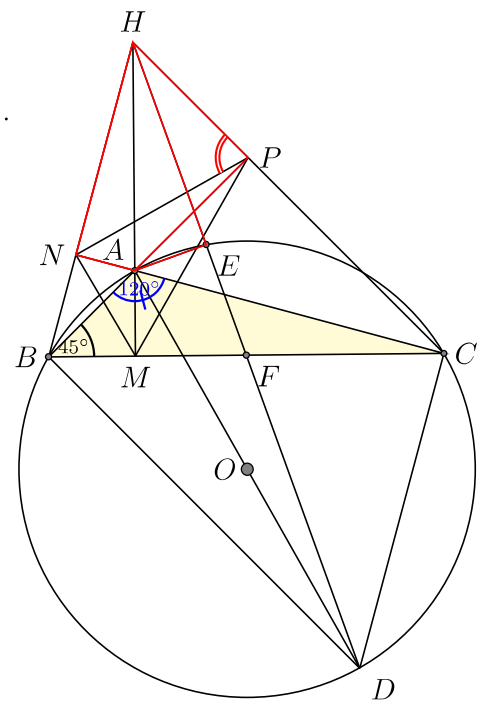
Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$ tại N và $CH \perp AB$ tại P.

Do đó, $\widehat{BNC} = \widehat{BPC} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $BNPC$ nội tiếp được.

Suy ra $\widehat{HPN} = \widehat{NBC}$, (cùng bù với $\widehat{NPC}$).
Mặt khác tam giác BNC vuông tại N nên

$\widehat{NBC} = 90^\circ - \widehat{NCB} = 90^\circ - (180^\circ - 120^\circ - 45^\circ) = 75^\circ$.

Vậy $\widehat{HPN} = 75^\circ$.
Lại có $\widehat{AMC} = \widehat{APC} = 90^\circ$ nên tứ giác $APCM$ nội tiếp được.
Suy ra $\widehat{APM} = \widehat{ACM}$, (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$).
Mà $\widehat{NPA} = \widehat{ACB}$, (cùng chắn $\overset{\frown}{BN}$).
Suy ra $\widehat{APM} = \widehat{NPA} = \widehat{ACM}$.
$\Rightarrow \widehat{NPM} = 2\widehat{ACM} = 2.15^\circ = 30^\circ$.
Tương tự, $\widehat{PNM} = 2\widehat{ABC} = 2.45^\circ = 90^\circ$.
Từ đó, $\dfrac{MP}{MN} = \dfrac{1}{\sin 30^\circ} = 2$.



b) Ta có tam giác AED nội tiếp đường tròn đường kính AD nên tam giác AED vuông tại E. Khi đó

$$\widehat{ANH} = \widehat{APH} = \widehat{AEH} = 90^\circ.$$

Suy ra năm điểm A, N, H, P, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

Ta lại có tam giác ABD và tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên tam giác ABD vuông tại B và tam giác ACD vuông tại C.

Khi đó $BH \parallel CD$, (cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel BD$, (cùng vuông góc với AB).

Suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Suy ra F là trung điểm của đường chéo HD.

c) Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 45^\circ$, (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) nên tam giác ACD vuông cân tại C.

Suy ra CO là trung tuyến cũng là đường cao, vậy $CO \perp AD$.

Mặt khác $\widehat{PNC} = \widehat{ACO}\,(= 45^\circ)$ nên $NP \parallel CO$.

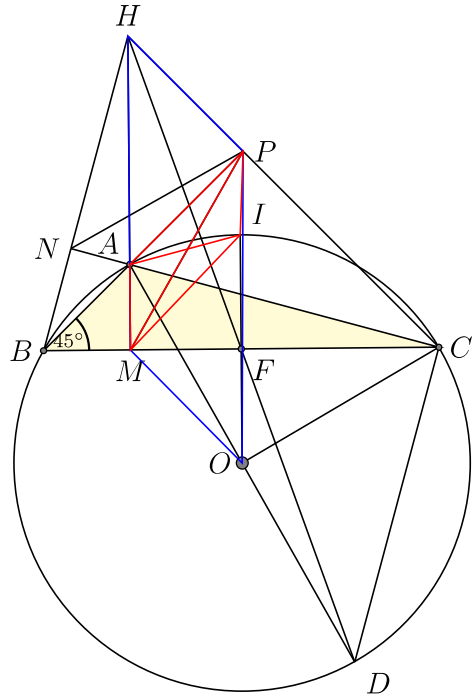
Suy ra $AD \perp NP$, (cùng vuông với CO).

Ta có OF là trung trực của BC nên $IB = IC$.

Mặt khác, $\widehat{BIC} = 120^\circ$ nên $\widehat{BIO} = 60^\circ$, suy ra tam giác BIO đều. Do đó $IB = IC = R$.

Dễ thấy F là trung điểm của OI nên tứ giác $OHID$ là hình bình hành. Suy ra $IH = OD = R$.

Do đó, $IB = IC = IH = R$. Vậy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.



Dễ thấy, tam giác BPC vuông cân tại P có PF là trung tuyến nên là đường cao, vậy $PF \perp BC$.

Mà $OI \perp BC$ nên P, I, F, O thẳng hàng. Suy ra $OP \parallel HM$, (cùng vuông với BC).

Lại có tam giác AMB vuông cân tại M nên $MA = MB$. Mà $OA = OB$ nên MO là trung trực của AB. Suy ra $MO \perp AB \Rightarrow MO \parallel HP$, (cùng vuông với AB).

Do đó, tứ giác $MOPH$ là hình bình hành. Suy ra $HM = OP$.

Mặt khác, tứ giác $AHIO$ có $HI \parallel OA$ và $HI = OA = R$ nên tứ giác $AHIO$ là hình bình hành, suy ra $AH = OI = R$. Vậy $AM = PI$. Mà $AM \parallel PI$ nên tứ giác $AMIP$ là hình bình hành. Do đó, đường chéo AI đi qua trung điểm của đường chéo MP.

■

Bình luận. Bài toán này khá thú vị, ngoài kiến thức lớp 9 về tứ giác nội tiếp thì bài toán còn có thêm các kiến thức về tính chất của hình bình hành, đường trung trực, định lý sin,... Tuy nhiên, bài toán khá phức tạp ở hình vẽ, học sinh không nên vẽ vẽ hết các chi tiết trong bài chỉ để giải 1 câu mà hãy chia hình ra. Như vậy, việc nhìn hình sẽ dễ dàng hơn.

Bài tập tương tự.