Vậy bài toán được giải quyết. ■

Bình luận. Bài toán thực chất là bài toán nổi tiếng được nhà toán học Ramsey phát biểu. Muốn giải bài toán học sinh cần phải linh hoạt trong quá trình vận dụng nguyên lí Dirichle.

Bài tập tương tự.

1) Chứng minh rằng trong 9 người bất kì luôn tìm được 3 người đôi một quen nhau hặc 4 người đôi một không quen nhau.

Trích bài toán Ramsey nổi tiếng

2) Giả sử mỗi điểm trên mặt phẳng có kẻ lưới ô vuông được tô bằng một trong hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Trích luận văn thạc sĩ-Trần Thị Liên

2 Đề thi Phổ thông năng khiếu đại học Quốc gia TP. HCM (vòng 1)

Bài 1

Biết a và b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left(\frac{(a+2b)^2-(b+2a)^2}{a+b}\right):\left(\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{a-b}-3ab\right)=3.$$

Tính $S=\dfrac{1+2ab}{a^2+b^2}$.

Phân tích. Thoạt nhìn bài toán, ta không thể tính ngay S được. Việc tính S trở nên dễ dàng khi chúng ta biết được mối liên hệ giữa đại lượng a, b và mối quan hệ ấy được "ẩn giấu" trong đẳng thức bên trên. Việc còn lại bây giờ là biến đổi đẳng thức ấy để tìm mối quan hệ giữa a và b. Việc này khá đơn giản!

Sau khi biến đổi ta sẽ được đẳng thức $a-b=1$. Đến đây, ta có hai hướng giải quyết sau

Hướng 1. Đơn giản nhất, đó là $a-b=1 \Leftrightarrow a=1+b$. Suy ra

$$S=\frac{1+2(1+b)b}{(1+b)^2+b^2}=\frac{2b^2+2b+1}{2b^2+2b+1}=1.$$

Hướng 2. Nếu tinh ý ta có thể biến đổi

$$a-b=1 \Rightarrow (a-b)^2=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1+2ab \Leftrightarrow \frac{1+2ab}{a^2+b^2}=1 \text{ hay } S=1.$$

Ở bài giải này, chúng tôi sẽ giải quyết theo Hướng 2.

Lời giải. Với $a,b>0, a\neq b$ ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(a+2b)^2-(b+2a)^2}{a+b}\right):\left(\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{a-b}-3ab\right)=3\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{(b-a)(3a+3b)}{a+b}:\left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b-\sqrt{ab}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{a-b}-3ab\right)=3\\
\Leftrightarrow\quad &3\left(a-b\right):\left[\left(a+b\right)^2-4ab\right]=3 \Leftrightarrow 3\left(a-b\right):\left(a-b\right)^2=3 \Leftrightarrow a-b=1.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\left(a-b\right)^2=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1+2ab \Leftrightarrow \frac{1+2ab}{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow S=1.$$

■

Bình luận. Đây là một dạng toán khá quen thuộc và cũng thường xuất hiện trong các đề thi trường PTNK TP. HCM. Nó được thác triển từ bài toán rút gọn biểu thức và có lẽ đó cũng là ý đồ chính ở bài toán này. Việc tìm ra mối liên hệ giữa đại lượng a và b thông qua việc rút gọn biểu thức bên vế trái khá đơn giản. Sau đó bằng phương pháp nào đó (thay đại lượng này bằng đại lượng kia hay biến đổi trực tiếp thành S) ta sẽ tính được giá trị của S.

Bài tập tương tự.

1. Biết a và b là các số dương, $a\neq b$ và

$$\left(\frac{a(a-4b)+b(b+2a)}{a+b}\right):\left[\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\right]=2016.$$

Tính $S=a+b$.

Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

2.

Bài 2

a) Giải phương trình $\left(x^2-6x+5\right)\left(\sqrt{x-2}-x+4\right)=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2y}-3\right)=0\\ x^2-6xy-y^2=6.\end{cases}$

Phân tích. a) Ở câu này, hướng giải quá rõ ràng. Đây là phương trình tích, việc giải phương trình này thông qua việc giải từng "phương trình con"

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0 \\ \sqrt{x-2}-x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0 \\ \sqrt{x-2}=x-4. \end{array}\right.$$

- Ở phương trình thứ nhất là dạng phương trình bậc hai. Để giải phương trình này ta có thể dùng biệt thức Δ hoặc dùng tính chất "$a+b+c=0$".
- Ở phương trình thứ hai, đây là dạng $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A=B^2. \end{cases}$

  Và việc giải phương trình căn thức lại chuyển về việc giải phương trình bậc hai quen thuộc.

b) Ở bài toán này, hướng giải khá rõ ràng. Phương trình đầu là một phương trình tích. Như bài toán trên, việc giải phương trình thông qua việc giải hai "phương trình con"

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x+2y}-3=0. \end{array}\right.$$

Từ đây, việc giải hệ ban đầu sẽ đưa về việc giải hai hệ nhỏ. Tuy nhiên, nếu để ý, ta có thể thấy ngay hệ

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases}$$

vô nghiệm. Do đó, việc tiếp theo chỉ là giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x+2y}=3 \\ x^2-6xy-y^2=6. \end{cases}$$

Giải hệ này, đơn giản nhất đó là từ phương trình đầu tiên của hệ trên, ta có thể biểu diễn được $x=9-2y$ và thay vào phương trình dưới để thu được phương trình bậc hai theo y. Việc còn lại bây giờ đó là giải phương trình này, quay trở lại tìm x và kiểm tra nghiệm.

Lời giải. a) Với điều kiện $x \geq 2$, phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0 \\ \sqrt{x-2}-x+4=0. \end{array}\right.$$

- $x^2 - 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \big(\text{không thỏa } x \geq 2\big) \\ x = 5, \big(\text{thỏa } x \geq 2\big). \end{array}\right.$
- $$\begin{aligned} \sqrt{x-2} - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x - 4 \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 2 = (x-4)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 7x + 18 = 0, \big(\text{vô lý}\big). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 5$.

b) DKXD: $x \geq 0, x + 2y \geq 0$.

Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Do đó, với $x > 0, x + 2y \geq 0$, hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{x+2y} - 3 = 0 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - 2y \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 6xy - y^2 = 6 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+2y)^2 - 10y(x+2y) + 15y^2 = 6 \Leftrightarrow 15y^2 - 90y + 75 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 5. \end{aligned}$$

- Với $y = 1$ ta có $x = 7$, (thỏa $x \geq 0$).
- Với $y = 5$ ta có $x = -1$, (không thỏa $x \geq 0$).

Vậy hệ đã cho có duy nhất nghiệm $(x; y) = (1; 7)$.

■

Bình luận. Bài toán này là một dạng khá quen thuộc trong các kì thi vào trường chuyên. Nó không đơn thuần là giải phương trình bậc hai và hệ như các đề thi tuyển sinh vào trường thường mà đòi hỏi người giải có nhiều kiến thức hơn thế. Trong bài toán này, đó là việc vận dụng kiến thức về phương trình tích và phương trình căn thức dạng $\sqrt{A} = B$ để chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai quen thuộc. Tuy nhiên, bài toán không quá rắc rối đối với thí sinh.

Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình $x\sqrt{x+5} = 2x^2 - 5x$.

Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{y}+x-3\right)\left(y+\sqrt{x}\right)=0 \\ x^2+y=5. \end{cases}$

Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

Bài 3

Cho phương trình

$$(x+m)^2-5(x+m)+6=0. \tag{1}$$

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi tham số m. Tính $S=(x_1+m)^2+(x_2+m)^2+5(x_1+x_2+2m)$.

b) Biết $x_1<x_2$, tìm m sao cho $x_2<1$ và $x_1^2+2x_2=2(m-1)$.

Phân tích. Đây là phương trình bậc hai với biến x. Tuy nhiên nếu tinh ý thì đây là phương trình bậc hai với biến $t=x+m$. Và bài toán trở nên vô cùng đơn giản khi ta phát hiện điều này!

a) Với cách đặt như vậy, ta dễ dàng tìm ra hai nghiệm $t=2 \vee t=3$ hay $x+m=2 \vee x+m=3$. Do vai tròn x_1, x_2 như nhau nên ta có thể giả sử $x_1+m=2$ và $x_2+m=3$. Việc còn lại là thay chúng vào S và ra kết quả cuối cùng.

b) Ở câu này cũng khá đơn giản. Với giả thiết $x_1<x_2$ ta có ngay $x_1+m=2$ và $x_2+m=3$. Biến đổi x theo m và thay vào đẳng thức $x_1^2+2x_2=2(m-1)$ sẽ tìm được m.

Đến đây, còn một giả thiết chưa dùng đến, đó là $x_2<1$. Đây chính là giả thiết loại nghiệm. Đơn giản nhất là thay m vừa tìm được xem $x_2<1$ không. Hay một cách khác để tìm điều kiện m ngay từ đầu đó là $x_2=3-m<1 \Leftrightarrow m>2$.

Lời giải. a) Đặt $t=x+m$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$t^2-5t+6. \tag{2}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt. Thật vậy

$$t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow t=2 \vee t=3.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $t_1=2$ và $t_2=3$. Khi đó

$$x_1+m=t_1=2 \text{ và } x_2+m=t_2=3.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} S &= (x_1+m)^2+(x_2+m)^2+5(x_1+x_2+2m) \\ &= (x_1+m)^2+(x_2+m)^2+5(x_1+m+x_2+m) \\ &= 2^2+3^2+5(2+3)=38. \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi tham số m và

$$S=(x_1+m)^2+(x_2+m)^2+5(x_1+x_2+2m)=38.$$

b) Với giải thiết $x_1 < x_2$ ta suy ra

$$\begin{cases} t_1=2 \\ t_2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+m=2 \\ x_2+m=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2-m \\ x_2=3-m. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} x_1^2+2x_2=2(m-1) \Leftrightarrow (2-m)^2+2(3-m)=2(m-1) &\Leftrightarrow m^2-8m+12=0 \\ &\Leftrightarrow m=2 \vee m=6. \end{aligned}$$

Kiểm tra lại chỉ có $m=6$ là thỏa $x_2<1$.

Vậy với $m=6$, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_2<1$ và $x_1^2+2x_2=2(m-1)$.

■

Bình luận. Ở bài toán này, không biết người ra đề có dụng ý gì khi quá lộ liễu cho phương trình ở dạng $(x+m)^2-5(x+m)+6$ thay vì dạng khai triển của chúng $x^2+(2m-5)x+m^2-5m+6$. Tuy nhiên với dạng nào đi nữa, thì đây cũng là một bài toán khá "dễ thở". Thí sinh hoàn toàn có thể ghi điểm ở bài toán này.

Bài tập tương tự.