Để tìm được giá trị lớn nhất của $\dfrac{\sqrt{a-1}}{a}$ thì $\alpha^2 - 1 = 0$ hay $\alpha = 1$.

Khi đó, $\dfrac{\sqrt{a-1}}{a} \leq \dfrac{1}{2}$.

Tương tự, ta chứng minh được $\dfrac{\sqrt{b-4}}{b} \leq \dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{\sqrt{c-9}}{c} \leq \dfrac{1}{6}$.

**Lời giải.** Ta có

$$M = \frac{\sqrt{a-1}}{a} + \frac{\sqrt{b-4}}{b} + \frac{\sqrt{c-9}}{c}$$

Do $a \geq 1; b \geq 4$ và $c \geq 9$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM với các cặp số không âm,ta có:

$$\begin{cases} a = (a-1) + 1 \geq 2\sqrt{a-1} & \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a-1}}{a} \leq \dfrac{1}{2}. \\ b = (b-4) + 4 \geq 4\sqrt{b-4} & \Rightarrow \dfrac{\sqrt{b-4}}{b} \leq \dfrac{1}{4}. \\ c = (c-9) + 9 \geq 6\sqrt{c-9} & \Rightarrow \dfrac{\sqrt{c-9}}{c} \leq \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Do đó $M \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{12}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ b - 4 = 4 \\ c - 9 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \\ c = 18. \end{cases}$ ■

**Bình luận.** Đây là bài bất đẳng thức khá đơn giản, chỉ cần nắm vững bất đẳng thức AM-GM và cách tham số hóa để triệt tiêu các hằng số tự do là có thể đạt điểm tối đa bài toán.

**Bài tập tương tự.**

1) Cho các số $a, b, c$ thỏa mãn: $a \geq 1; b \geq 2; c \geq 3$ và $bc + 2\sqrt{2}ac + 3\sqrt{3} = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{a-1}} + \frac{2}{\sqrt{b-2}} + \frac{3}{\sqrt{c-3}}.$$

*Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM*

2) Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{9}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}} + 1995.$$

*Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM*

**Bài 7**

Cho 3 điểm $A, B, C$ cố định thẳng hàng ($B$ nằm giữa $A$ và $C$). Vẽ đường tròn $(O; R)$ bất kì đi qua $B, C$ ($BC \neq 2R$). Từ $A$ kẻ các tiếp tuyến $AM, AN$ đến $(O; R)$ ($M, N$ là các tiếp điểm). Gọi $I$, $K$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $MN$, $MN$ cắt BC tại $D$. Chứng minh:

1. $AM^2 = AB.AC$.
2. Gọi $O'$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $OID$. Chứng minh $O'$ thuộc đường thẳng cố định khi đường tròn $(O; R)$ thay đổi.

**Phân tích.** 1. Từ điều phải chứng minh $AM^2 = AB.AC$ ta sẽ đưa về tỷ lệ độ dài các cạnh để hi vọng có thể đưa về hai tam giác đồng dạng để giải bài toán này. Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{AM}$ nên ta xét $\Delta ABM$ và $\Delta AMC$.

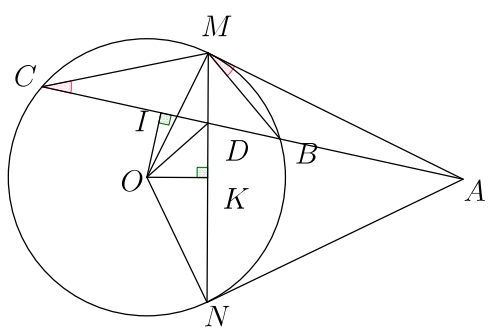
2. Dễ dàng chứng minh tâm $O'$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $OID$ là trung điểm của cạnh $ID$.

Một cách thủ công các bạn có thể vẽ trên cùng một hình khoảng ba điểm $O$, sẽ nhận được tương ứng ba điểm $O'$. Đến đây có thể dự đoán được ba điểm đó cùng thuộc trung trực của $ID$.

Vậy nhiệm vụ tiếp theo của ta là chứng minh $I, D$ cố định. Hiển nhiên $I$ cố định, vậy còn $D$. Không quá khó để chứng minh điều này, bởi vì:

$$AD.AI = AM^2 = const.$$

**Lời giải.**




1. Xét $\Delta ABM$ và $\Delta AMC$, ta có:
   $\widehat{MAC}$ chung
   $\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$ (cùng chắn cung $MB$)

Do đó $\Delta ABM \sim \Delta AMC$ (g-g)
Suy ra $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{AM}$ hay $AM^2 = AB.AC$ (đpcm)

2. Do $B$, $C$ cố định nên trung điểm $I$ của $BC$ cố định.

   Mặt khác, do tứ giác $IDKO$ nội tiếp nên $AD.AI = AK.AO = AM^2 = const$. Do đó, $D$ cố định.

   Ta có $\Delta OID$ vuông tại $I$, nên tâm $O'$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $OID$ là trung điểm của cạnh huyền $OD$.

   Khi đó, $O'I = O'D$ và $I, D$ cố định nên tâm $O'$ di động trên đường trung trực của đoạn thẳng $ID$ khi $O$ di động trên trung trực của $BC$.

■

**Bình luận.** Đây là một bài không quá khó để giành điểm tuyệt đối. Ngay từ câu 1 ta đã nhận thấy mức độ đơn giản của bài toán, và đó cũng là gợi ý để ta có thể giải quyết nốt câu 2.

**Bài 8**

Cho đường tròn $(O)$ đường kính $BC$, trên đường tròn lấy điểm $A$ $(A \neq B, C)$. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt $(O)$ tại $E$, $AI$ là đường cao của tam giác $ABC$.

1. Xác định vị trí của điểm $A$ trên đường tròn để tam giác $AIE$ có diện tích lớn nhất.

2. Trên đường tròn lấy điểm $M$ sao cho góc $\widehat{MCE}$ là góc tù; kẻ $EH$, $CK$ lần lượt vuông góc với $MC$, $ME$ tại $H$ và $K$. Chứng minh $MO$ vuông góc với $HK$.

**Phân tích.** 1. Đối với dạng toán cực trị hình học, ta phải tìm được giá trị cực đại hoặc cực tiểu trước. Sau đó, dựa vào điều kiện bằng của bài toán để tìm vị trí của điểm di động. Ở bài này, việc đầu tiên là ta biểu diễn diện tích của tam giác $AIE$ theo các cạnh có trong hình sau đó sử dụng các bất đẳng thức phụ để đánh giá diện tích. Ta dễ thấy

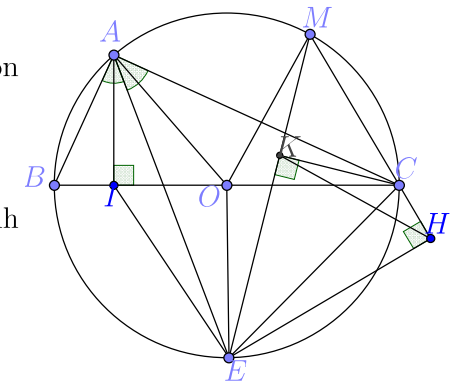
$$S_{AIE} = \frac{1}{2}AI.IE.sin\widehat{AIE} = \frac{1}{2}AI.IE.sin(90^0 + \widehat{OIE})$$

$$= \frac{1}{2}AI.IE.\cos\widehat{OIE} = \frac{1}{2}AI.IE.\frac{OI}{IE} = \frac{1}{2}AI.OI = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - x^2}.x$$

. Từ đây, ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM để đánh giá diện tích.

2. Để chứng minh $OM \perp HK$ ta cần chứng minh $\widehat{MHK} + \widehat{OMH} = 90^o$. Như vậy, ta chỉ cần biểu diễn $\widehat{MHK}$ và $\widehat{OMH}$ theo các góc đã biết sau đó tính tổng của chúng.

**Lời giải.**




1. Đặt $IO = x$ $(x \geq 0)$, gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.
   Ta có: $AI = \sqrt{R^2 - x^2}$.
   Do $AE$ là phân giác của góc $BAC$ nên E là điểm chính giữa của cung $BC$, suy ra $OE \perp BC$.
   Từ đó ta có $IE = \sqrt{R^2 + x^2}$.

   Ta có $S_{AIE} = \dfrac{1}{2}AI.IE.sin\widehat{AIE} = \dfrac{1}{2}AI.IE.sin(90^0 + \widehat{OIE}) = \dfrac{1}{2}AI.IE.\cos\widehat{OIE}$
   $= \dfrac{1}{2}AI.IE.\dfrac{OI}{IE} = \dfrac{1}{2}AI.OI = \dfrac{1}{2}\sqrt{R^2 - x^2}.x \leq \dfrac{1}{4}(R^2 - x^2 + x^2) = \dfrac{R^2}{4}$.

   Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{R^2 - x^2} = x \Longleftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

   Từ đó ta có $AI = \sqrt{R^2 - x^2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

   Vậy điểm $A$ thuộc đường tròn $(O)$ sao cho khoảng cách từ $A$ đến $BC$ bằng $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

2. Ta có $\widehat{EMC} = \dfrac{1}{2}\widehat{EOC} = \dfrac{1}{2}90^0 = 45^0$, suy ra $\Delta MEH$ vuông cân tại $H$.
   Tứ giác $KCHE$ nội tiếp nên $\widehat{CHK} = \widehat{CEK}$ (cùng chắn cung $KC$).
   Ta lại có $\widehat{OMH} = \widehat{OME} + \widehat{EMH} = \widehat{OEI} + 45^0$.
   (vì $\Delta OME$ cân tại M nên $\widehat{OME} = \widehat{OEM}$).
   Suy ra $\widehat{MHK} + \widehat{OMH} = \widehat{OEM} + 45^0 + \widehat{KEC} = \widehat{OEC} + 45^0 = 90^0$.
   (vì $\Delta OEC$ vuông cân tại $O$ nên $\widehat{OEC} = 45^0$).
   Suy ra $OM \perp HK$.

■

**Bình luận.** Bài toán khai thác các tính chất, vấn đề khá quen thuộc đối với học sinh trung học cơ sở. Cách tiếp cận vấn đề cũng khá quen thuộc từ việc xác định điểm $A$ để diện tích $\Delta AIE$ lớn nhất đến chứng minh $MO \perp HK$. Học sinh chỉ cần biểu diễn được diện tích sau đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM để đánh giá là có thể giải quyết bài toán cực trị. Đối với việc chứng minh $MO \perp HK$, ta chỉ cần tập trung chứng minh hai góc còn lại có tổng bằng $90^o$ thì bài toán sẽ được giải quyết.

**Bài tập tương tự.**

1. Cho đường tròn $(O)$, bán kính $R$, dây $BC$ cố định khác đường kính. $A$ là một điểm di động trên cung lớn $BC$ sao cho $\Delta ABC$ nhọn. Các đường cao $BE, CF$ của $\Delta ABC$ cắt nhau tại $H$.

   a) Chứng minh tứ giác $BECF$ nội tiếp và $AO \perp EF$.

   b) Tia $EF$ cắt $(O)$ tại $I$, tia $AO$ cắt $(O)$ tại $G$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$, $D$ là giao điểm hai đường thẳng $AH$ và $BC$. Chứng minh $AI^2 = 2AD.OM$.

   c) Trong trường hợp $\Delta ABC$ cân tại $A$, gọi $x$ là khoảng cách từ $O$ đến $BC$. Tìm $x$ để chu vi $\Delta ABC$ lớn nhất.

   *Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, tỉnh Ninh Bình năm 2016- 2017*

# 10 Đề thi chuyên sở GD&ĐT Hưng Yên

**Bài 1**

Cho biểu thức $P = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức $P$.

b) Tìm các giá trị $x$ để $P = \dfrac{3}{4}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P$.

**Phân tích.** Đối với bài tập này, học sinh chỉ cần quy đồng và rút gọn tử và mẫu là có thể hoàn tất yêu cầu ý **a)**. Đối với ý **b)** thực chất là sự lồng ghép để giải phương trình bậc 2. Ý **c)** hướng tới giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc 2. Học sinh chỉ cần phân tích tổng bình phương là có được kết quả.

**Lời giải.** Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$.

a) $P = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(2\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)-(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$.

b) Giải phương trình:

$$P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3x-8\sqrt{x}-3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(3\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$$

c) Biểu thức $A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P = 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) = 2(\sqrt{x}-2)^2 - 8 \geq -8$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $A$ là $-8$, khi chỉ khi $x = 4$.