# 9 Đề thi tuyển sinh trường THPT chuyên, tỉnh Bạc Liêu

**Bài 1**

Cho $n = 2018.2017^{2016} - 11^{2017} - 6^{2016}$. Chứng minh n chia hết cho 17.

**Phân tích.** Do tính chất của đồng dư, ta sẽ tìm dư của các cơ số lớn hơn 17 khi chia cho 17 để làm đơn giản hơn trong tính toán.

**Lời giải.** Ta có $2018 \equiv 12 \mod 17$, $2017 \equiv 11 \mod 17 \Rightarrow 2017^{2016} \equiv 11^{2016} \mod 17$.
Từ đó ta có: $2018.2017^{2016} \equiv 12.11^{2016} \mod 17$.
Hay $2018.2017^{2016} \equiv (11+1).11^{2016} = 11^{2017} + 11^{2016} \mod 17$.
Suy ra $2018.2017^{2016} - 11^{2017} \equiv 11^{2016} \mod 17$.
Suy ra $n = 2018.2017^{2016} - 11^{2017} - 6^{2016} \equiv 11^{2016} - 6^{2016} \mod 17$.
Ta lại có:

- $11^2 \equiv 2 \mod 17$, suy ra $11^{2016} = (11^2)^{1008} \equiv 2^{2008} \mod 17$.
- $6^2 \equiv 2 \mod 17$, suy ra $6^{2016} = (6^2)^{1008} \equiv 2^{2008} \mod 17$.

Do đó ta có $n \equiv 2^{1008} - 2^{1008} = 0 \mod 17$.
Vậy $n$ chia hết cho 17. ■

**Bình luận.** Bài tập này cũng tương đối dễ, tuy nhiên đòi hỏi học sinh phải nắm vững các tính chất của phép đồng dư để có thể có hướng đi và phân tích bài toán tốt.

**Bài tập tương tự.**

1) Cho $n = 2019.2017^{2019} + 2019^{2017} + 2026^{2017}$. Chứng minh $n$ chia hết cho 19.

*Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM*

**Bài 2**

Tìm các số nguyên $x, y$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

**Lời giải.** **Cách 1.**

$$x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = -5x^2y^2 + 35xy - 60$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 = 5(-x^2y^2 + 7xy - 12) \qquad (*)$$

Vì $(x-y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ nên $-x^2y^2 + 7xy - 12 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. (1)

Đặt $t = xy, (t \in \mathbb{Z})$. Từ (1) ta có $-t^2 + 7t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 4$.

Mà $t \in \mathbb{Z}$ nên ta có $t = 3 \vee t = 4$ hay $xy = 3 \vee xy = 4$.

Khi đó $5(-x^2y^2 + 7xy - 12) = 0$ nên từ $(*)$ ta cũng có $(x-y)^2 = 0$ hay $x = y$.

- $\begin{cases} xy = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x = y. \end{cases}$ (không tồn tại $x \in \mathbb{N}$),
- $\begin{cases} xy = 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2. \end{cases}$

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình trên là: $(2; 2), (-2; -2)$.

**Cách 2.** Xét trường hợp $x, y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm $x^2, y^2$ ta có:

$$\begin{aligned} & 37xy \geqslant 2xy + 5x^2y^2 + 60 \\ \Leftrightarrow\ & 35xy \geqslant 5x^2y^2 + 60 \\ \Leftrightarrow\ & 7xy \geqslant x^2y^2 + 12 \\ \Rightarrow\ & 8xy \geqslant x^2y^2 + 12 \\ \Leftrightarrow\ & 4 \geqslant (xy-4)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \geqslant xy - 4 \geqslant -2 \\ \Leftrightarrow\ & 6 \geqslant xy \geqslant 2. \end{aligned}$$

Suy ra, $xy \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Mặt khác, phương trình ban đầu tương đương với:

$$(x+y)^2 = 39xy - 5x^2y^2 - 60. \quad (*)$$

Ta xét các trường hợp:

- TH1: $xy = 2$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2 = -6$ (vô lí).
- TH2: $xy = 3$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2 = 12$ (loại vì $(x+y)^2$ là số chính phương).
- TH3: $xy = 4$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2 = 16$. Giải ra ta được $x = y = 2$.
- TH4: $xy = 5$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2 = 10$ (loại vì $(x+y)^2$ là số chính phương).
- TH5: $xy = 6$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2 = -6$ (vô lí).

Thử lại ta thấy $(x; y) = (2; 2)$ là nghiệm của phương trình.
Do $xy$ và $(-x).(-y)$ có vai trò như nhau trong phương trình ban đầu nên nghiệm của phương trình là $(2; 2), (-2; -2)$. ■

**Bình luận.** Đây là bài toán phương trình nghiệm nguyên khá quen thuộc, việc biến đổi để thu được hằng đẳng rồi sau đánh giá vế còn lại là một cách giải thường xuyên được áp dụng đối với dạng toán này.

**Bài tập tương tự.**

1. Tìm tất cả số nguyên $x, y$ thỏa $x^2 - xy = 7x - 2y - 15$.

   *Trích đề thi hsg lớp 9, Yên Bái, 2011-2012*

   Đáp án. $(x, y) \in \{(-3, -9), (1, -9), (3, -3), (7, 3)\}$

2. Tìm tất cả số nguyên $x, y$ thỏa $2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0$.

   *Trích đề thi thử vào lớp 10, lần 2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, 2016- 2017*

   Đáp án. $(x, y) \in \{(13; 0), (-14, -1), (-2, 3), (1, -4)\}$

**Bài 3**

Cho $a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}}$. Chứng minh $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

**Phân tích.** Thoạt nhìn bài toán có vẻ khá phức tạp khi xuất hiện của căn thức bậc 2 và bậc 3. Tuy nhiên, dễ dàng nhận thấy, trong biểu thức của $a$ và điều cần chứng minh xuất hiện khá nhiều $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[3]{y^2}$ và lũy thừa của nó. Do đó, ta sẽ đặt ẩn phụ để bài toán được đơn giản hơn, dễ phân tích hơn.

**Lời giải.** Đặt $b = \sqrt[3]{x^2} \geq 0, c = \sqrt[3]{y^2} \geq 0$. Bài toán trở thành:
Cho $a = \sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2}$ với $b$, $c$ là hai số thực không âm. Chứng minh: $b + c = \sqrt[3]{a^2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt[3]{c^3 + bc^2} \\ &= \sqrt{b^2(b + c)} + \sqrt{c^2(b + c)} \\ &= b\sqrt{b + c} + c\sqrt{b + c} \quad (\text{do } b, c \geq 0) \\ &= (b + c)\sqrt{b + c}. \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 = (b + c)^3$ hay $b + c = \sqrt[3]{a^2}$. ■

**Bình luận.** Rõ rằng bài toán trên ta hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp biến đổi đại số bình thường mà không cần đặt ẩn phụ. Tuy nhiên, việc đặt ẩn phụ rõ ràng đem lại lợi ích rất nhiều, làm cho bài toán đơn giản hơn, và khá quen thuộc với học sinh.
Khi đặt ẩn phụ ta cần quan tâm đến điều kiện của ẩn mới. Chẳng hạn như trong bài toán này, nếu ta quên xác định điều kiện của $b$ và $c$, thì khi đưa chúng ta khỏi căn bậc 2 sẽ gặp khó khăn và có thể dẫn đến sai lầm.

**Bài tập tương tự.**

1) Cho $x = \sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1} + 2$. Tính giá trị biểu thức $P = x^3 - 6x^2 + 21x + 2016$.

*Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, tỉnh Hưng Yên năm 2016- 2017*

2) Cho $a = \sqrt{x^4 + x^2y\sqrt[3]{x^2y}} + \sqrt{y^4 + xy^2\sqrt[3]{xy^2}}$. Chứng minh: $x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a^2}$.

*Châu Ngọc Vinh-SV ĐHSP TPHCM*

**Bài 4**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = x - 3xy \\ 2x^2 + y^2 - 17 = 3xy - x. \end{cases}$

**Lời giải.** Phương trình thứ nhất tương đương $(x+y-1)(x+2y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x+2y=0. \end{array}\right.$

- $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$, thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = -1 \\ x = \dfrac{-4}{3} \Rightarrow y = \dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$$

- $x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$, thay vào phương trình thứ hai, ta có:

$$15y^2 - 2y - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{17}{15} \Rightarrow x = \dfrac{-34}{15} \\ y = -1 \Rightarrow x = 2. \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là $(2; -1), (\frac{-4}{3}; \frac{7}{3}), (\frac{-34}{15}; \frac{17}{15})$. ■

**Bài tập tương tự.**

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = x - 3y + 5xy \\ x^2 + y^2 + 8 = 5xy + x. \end{cases}$

*Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM*

**Bài 5**

Cho phương trình: $x^4 + 2(m-3)x^2 + 3m + 9 = 0$ (với $m$ là tham số). Tìm tất cả các giá trị $m$ để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

**Lời giải.** Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + 2(m-3)t + 3m + 9 = 0. \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt. Điều này đồng nghĩa với:

$$\begin{cases} \Delta' = (m-3)^2 - 3m - 9 > 0 \\ S = t_1 + t_2 = -2(m-3) > 0 \\ P = t_1.t_2 = 3m + 9 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 9 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ m < 3 \\ m > -3. \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 0.$$

Vậy với $-3 < m < 0$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm dương phân biệt. ■

**Bài tập tương tự.**

1) Tìm $m$ để phương trình $x^4 + 2mx^2 - 4m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ thỏa $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 4$.

*Châu Ngọc Vinh-SV ĐHSP TPHCM*

**Bài 6**

Cho các số $a, b, c$ thỏa mãn: $a \geq 1; b \geq 4; c \geq 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{bc\sqrt{a-1} + ac\sqrt{b-4} + ab\sqrt{c-9}}{abc}.$$

**Phân tích.** Dễ thấy $M = \dfrac{\sqrt{a-1}}{a} + \dfrac{\sqrt{b-4}}{b} + \dfrac{\sqrt{c-9}}{c}$.
Do ba biến $a, b, c$ có vai trò không bình đẳng với nhau trong biểu thức $M$ nên để tìm giá trị lớn nhất của $M$ ta đi tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{\sqrt{a-1}}{a}, \dfrac{\sqrt{b-4}}{b}, \dfrac{\sqrt{c-9}}{c}$.
Xét $\dfrac{\sqrt{a-1}}{a}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có:

$$\frac{\sqrt{a-1}}{a} = \frac{1}{\alpha}.\frac{\sqrt{a-1}.\alpha}{a} \leq \frac{1}{\alpha}.\frac{a-1+\alpha^2}{2a}.$$