$BD.CE = BE.CD \Leftrightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AC}{AE} \Leftrightarrow AB = AC$ (đúng)

$BF.CE^2 = BE.CD^2 \Leftrightarrow \dfrac{BF}{BE} = \dfrac{CD^2}{CE^2} \Leftrightarrow \dfrac{BF}{BD}.\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD^2}{CE^2} \Leftrightarrow \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{BD}{BE}$

$\Leftrightarrow \Delta BFD \sim \Delta BDE$.

Lời giải. a) Chứng minh $ICEF$ nội tiếp.

Ta có: $AB \perp BO; DI \perp BO \Rightarrow AB \parallel DI \Rightarrow \widehat{DIC} = \widehat{ABC} = \widehat{DEC}$

$\Rightarrow ICEF$ nội tiếp (đpcm).

b) Chứng minh $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH}$.

Xét ΔBID và ΔBDC ta có:

$\begin{cases} \widehat{DBC} \text{ chung} \\ \widehat{BDI} = \widehat{ABD} = \widehat{DCB} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BID \sim \Delta BDC \Rightarrow BI.BC = BD^2$

Mà $BI.BC = \dfrac{1}{2}BH.2BH = BH^2$

$\Rightarrow BD^2 = BH^2 \Rightarrow BD = BH$ Ta có: $\widehat{BDK} = \widehat{ABD} = \widehat{BKD}$

$\Rightarrow \Delta BDK$ cân tại B $\Rightarrow BD = BK$

Suy ra $BD = BH = BK \Rightarrow K$ thuộc (B) bán kính $BD = BH = BK$

$\Rightarrow \widehat{DBH} = 2\widehat{DKH}$ (đpcm) .

c) Chứng minh rằng: $BD.CE = BE.CD$ và $BF.CE^2 = BE.CD^2$

Xét ΔABD và ΔABE ta có:

$\begin{cases} \widehat{BAD} \text{ chung} \\ \widehat{ABD} = \widehat{AEB} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta ABE(g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{AB}{AE}$

Tương tự ta có: $\Delta ACD \sim \Delta AEC(g.g) \Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AC}{AE}$

mà $AB = AC$

Suy ra $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE} \Rightarrow BD.CE = BE.CD$ (đpcm) . Xét ΔBDF va ΔBED ta có:

$\begin{cases} \widehat{DBE} \text{ chung} \\ \widehat{BDF} = \widehat{BED} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Delta BDF \sim \Delta BED(g.g) \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{BF}{BD}.\frac{BD}{BE} = \frac{CD^2}{CE^2}$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BE} = \frac{CD^2}{CE^2} \Rightarrow BF.CE^2 = BE.CD^2 \text{ (đpcm) .}$$

■

Bình luận. Câu a) là một câu cơ bản học sinh chỉ cần sử dụng hết các giả thiết sẽ dễ dàng tìm ra lời giải.

Câu b) sẽ là câu khó nếu học sinh không suy ra được K nằm trên đường tròn (B) bán kính $BD = BH$ và khéo léo biến đổi $BD^2 = BH^2 = 2BI.\frac{1}{2}BC = BI.BC$.

Bài 4

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^3 + 1 = 4y^2$.

b) Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $B = x^4 - x^2 - 10x - 25$ là số nguyên tố.

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^3 + 1 = 4y^2$

Phân tích. Đầu tiên ta có $x^3 + 1 = 4y^2 \Leftrightarrow (2y - 1.)(2y + 1) = x^3$ và $(2y + 1; 2y - 1) = 1$ nên $2y + 1 = a^3; 2y - 1 = b^3\ (a, b \in \mathbb{Z})$. Từ đó suy ra $a^3 - b^3 = 2$, sau đó ta giải phương trình tìm được a, b rồi từ đó tìm được x, y.

Lời giải. $x^3 + 1 = 4y^2 \Leftrightarrow (2y - 1.)(2y + 1) = x^3$

Ta có: $(2y + 1; 2y - 1) = 1$ cho nên $2y + 1 = a^3; 2y - 1 = b^3\ (a, b \in \mathbb{Z})$

Suy ra $a^3 - b^3 = 2$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - b = 2 \\ a^2 + ab + b^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{6} \text{ (vô lý)} \\ b = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{6} \text{ (vô lý)} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6} \text{ (vô lý)} \\ b = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{6} \text{ (vô lý)} \end{cases} \end{array}\right.$$

Suy ra $(x; y) = (-1; 0)$ ■

Bình luận. Đây là một bài phương trình nghiệm nguyên khá đơn giản, học sinh chỉ cần nhận xét được $(2y + 1; 2y - 1) = 1$ là có thể tìm ra lời giải cho bài này.

Bài tập tương tự.

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^3 + 1 = 9y^2$.

Bùi Tiến Lộc -SV ĐHSP TPHCM

b) Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $B = x^4 - x^2 - 10x - 25$ là số nguyên tố.

Phân tích. Dựa vào định nghĩa số nguyên tố ta sẽ nghĩ đến việc phân tích biểu thức B thành nhân tử. Sau đó sử dụng định nghĩa số nguyên tố ta dễ dàng có được các phương trình.

Lời giải. Ta có: $B = x^4 - x^2 - 10x - 25 = (x^2 - x - 5)(x^2 + x + 5)$.

Mà B là số nguyên tố và $x^2 + x + 5 \neq 1, \forall x \in \mathbb{N}$.

Suy ra $x^2 - x - 5 = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $x = 3$. ■

Bình luận. Bài này học sinh chỉ cần sử dụng được giả thiết x là số tự nhiên và biểu thức B là số nguyên tố thì sẽ dễ dàng tìm ra lời giải.

Bài tập tương tự.

Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $B = x^4 - 2x^3 + 6x - 9$ là số nguyên tố.

Bùi Tiến Lộc -SV ĐHSP TPHCM

Bài 5

a) Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a + bc} + \dfrac{1}{b + ac} + (a + b)(4 + 5c)$.

b) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính bằng $R = 4cm$ (O nằm trong tứ giác $ABCD$). Xét 33 điểm phân biệt nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong 33 điểm đó luôn tìm được 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$.

a) Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a + bc} + \dfrac{1}{b + ac} + (a + b)(4 + 5c)$.

Phân tích. Với bài này ban đầu ta thấy khi cộng mẫu của hai phân số lại ta sẽ có tích $(a+b)(1+c)$ nên nếu sau đó ta dùng BĐT Cauchy ta sẽ rút gọn đi được nhân tử $(a+b)$ và cuối cùng kết hợp với điều kiện $0 \leqslant c \neq 1$ sẽ cho ra giá trị nhỏ nhất của P. Và điều kiên $a+b+c=1$ được dùng để giải dấu "=" xảy ra.

Lời giải. Áp dụng BĐT: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{4}{x+y} \quad (\forall x, y \neq 0)$

Ta có:

$$P=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+(a+b)(5c+4) \geqslant \frac{4}{(a+b)(c+1)}+(a+b)(5c+4)$$

$$=\frac{4}{(1-c)(c+1)}+(1-c)(5c+4) \geqslant 4\sqrt{\frac{5c+4}{c+1}}=4\sqrt{\frac{c}{c+1}+4} \geqslant 8$$

Vậy $\min P=8$. Dấu "=" xảy ra khi $c=0,\ a=b=\dfrac{1}{2}$. ■

Bình luận. Ở bài này học sinh có thể sẽ gặp khó khăn trong việc giải "dấu "=" xảy ra khi" nếu chưa tận dụng được giả thiết $a+b+c=1$.

Bài tập tương tự.

Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 và thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a+bc}+\dfrac{1}{b+ac}+4$.

Bùi Tiến Lộc -SV ĐHSP TPHCM

b) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính bằng $R=4cm$ (O nằm trong tứ giác $ABCD$). Xét 33 điểm phân biệt nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong 33 điểm đó luôn tìm được 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$.

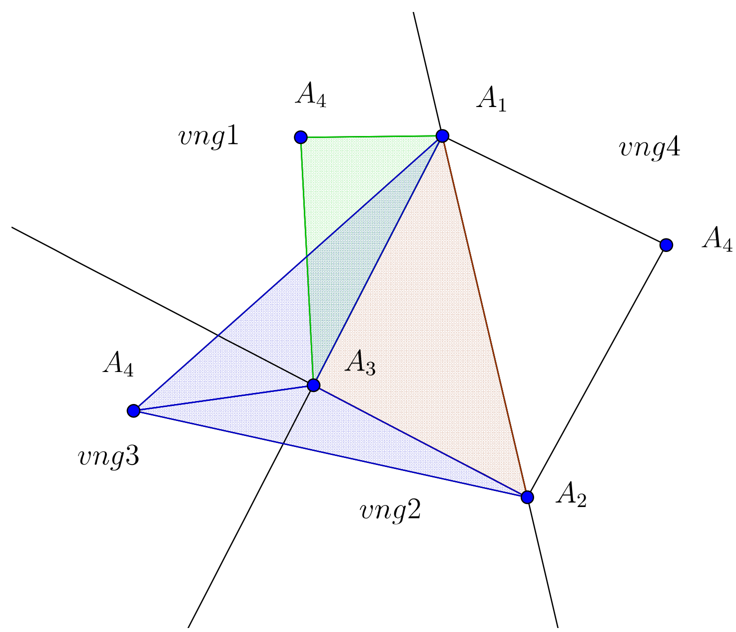
Phân tích. Đây là dạng toán khá quen thuộc đối với những bạn học hình học tổ hợp. Việc chia hữu hạn điểm vào một hình nào đó sau đó chứng minh tồn tại ba điểm có diện tích nhỏ hơn hay lớn hơn một số nào đó. Đối với dạng toán này, việc sử dụng nguyên lí Dirichle là hoàn toàn hợp lí. Tuy nhiên, ta cần xác định chia 33 điểm vào bao nhiêu miền. Ta chú ý, nguyên lí Dirichle có phát biểu đơn giản nhất như sau:" Chia $n+1$ con thỏ vào n lồng thì tồn tại một lồng có ít nhất 2 con thỏ".

Như vậy, để tồn tại một vùng có 3 điểm thì các miền còn lại phải có nhiều nhất 2 điểm. Do đó, ta nghĩ ngay tới việc chia 33 điểm vào 16 miền có diện tích bằng nhau. Khi đó, tồn tại một miền có ít nhất 3 điểm.

Từ đây, ta chứng minh tam giác đó có diện tích không quá $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$.

Tới đây, bài toán hoàn toàn giải được bằng phương pháp phản chứng.

Lời giải. Ta chứng minh tính chất sau: "Từ n điểm ($n \geqslant 3$) trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, sẽ tạo thành ít nhất $n-2$ tam giác không có điểm chung trong".
Chứng minh: Ta có n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geqslant 0$).
Từ 3 điểm A_1, A_2, A_3 sẽ tạo thành 1 tam giác $\Delta A_1A_2A_3$.



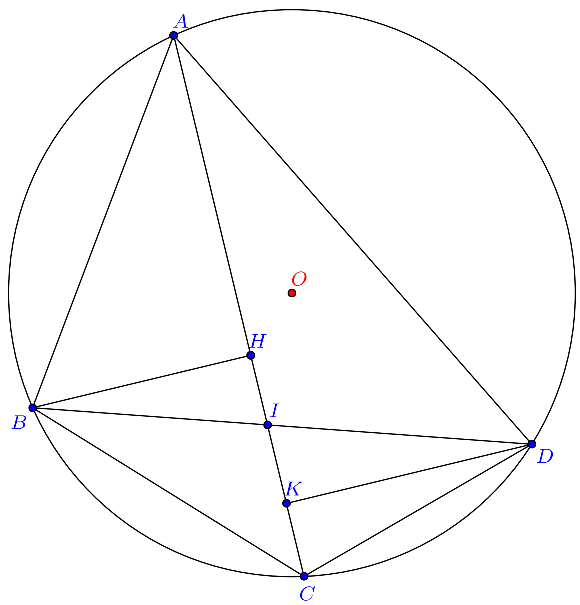
- TH1: Điểm A_4 nằm trong $\Delta A_1A_2A_3$ thì số tam giác không có điểm chung trong là 3 ($\Delta A_1A_2A_4, \Delta A_1A_3A_4, \Delta A_2A_3A_4$).
- TH2: Điểm A_4 nằm ngoài $\Delta A_1A_2A_3$.
  i) Nếu A_4 nằm ở vùng $1, 2, 4$ thì số tam giác không có điểm chung trong với tam giác $A_1A_2A_3$ tăng thêm một.
  ii) Nếu A_4 nằm ở vùng 3 thì số tam giác không có điểm chung trong với tam giác $A_1A_2A_3$ tăng thêm hai.

Chứng minh: Ta có n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geqslant 0$).
Từ 3 điểm A_1, A_2, A_3 sẽ tạo thành 1 tam giác $\Delta A_1A_2A_3$.
Nếu điểm A_4 nằm trong $\Delta A_1A_2A_3$ thì số tam giác không có điểm chung trong là 3 ($\Delta A_1A_2A_4, \Delta A_1A_3A_4, \Delta A_2A_3A_4$). Nếu điểm A_4 nằm ngoài $\Delta A_1A_2A_3$ thì số tam giác không có điểm chung trong là 2 ($\Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_2A_4$) (giả sử A_3 và A_4 nằm ở 2 phía đối với A_1A_2). Như vậy khi tăng thêm 1 điểm thì số tam giác sẽ tăng thêm ít nhất là 1 tam giác.
Tiếp tục lập luận tương tự khi ta thêm các điểm $A_5, A_6, ..., A_n$ ($n-5$ điểm) thì số tam

giác sẽ tăng thêm ít nhất là $n-5$ tam giác.

Vậy từ n điểm ($n \geqslant 3$) trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, sẽ tạo thành $n-2$ tam giác không có điểm chung trong.

Ta chứng minh: "Trong các tứ giác nội tiếp đường tròn thì hình vuông có diện tích lớn nhất".



Ta có: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}.AC.BH + \frac{1}{2}.AC.DK \leqslant \frac{1}{2}.AC.BI + \frac{1}{2}.AC.DI$ $= \frac{1}{2}.AC.BD \leqslant \frac{1}{2}.2\text{R}.2\text{R} = 2\text{R}^2$

Dấu "=" xảy ra khi $AC = BD = 2\text{R} \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán bằng phản chứng.

Giả sử trong các tam giác tạo thành từ 33 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, không có tam giác nào có diện tích nhỏ hơn $\frac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$. Theo tính chất ta vừa chứng minh thì từ 33 điểm sẽ tạo thành ít nhất 31 tam giác không có điểm chung trong. Khi đó tổng diện tích của các tam giác tạo thành từ 33 điểm sẽ không nhỏ hơn $31.\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 40,27cm^2$.

Mà diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất bằng $2\text{R}^2 = 32cm^2$ điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Suy ra điều phải chứng minh. ■

Bình luận. Bài hình học tổ hợp ở đề này khá hay, có thể nói đây là câu ấn tượng nhất của đề này. Câu này có thể chứng minh bằng nhiều phương pháp và sử dụng các tính chất cũng như các bổ đề khác nhau. Ở đây tác giả đã sử dụng phương pháp phản chứng và sử dụng thêm 2 bổ đề đã được nêu ra và chứng minh trên lời giải.

8 Đề thi tuyển sinh trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu (vòng 2)

Bài 1

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right) : \dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$ với $a > 0, a \neq 1$.

b) Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-3} = 3x - 6$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 3x + 2y = 5xy. \end{cases}$

Câu a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right) : \dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Phân tích. Trong biểu thức, nếu thay phép chia cho $\dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$ bằng phép nhân với nghịch đảo là $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}$, ta thấy sẽ thấy ở mẫu có xuất hiện $\sqrt{a}-1$ và $\sqrt{a}+1$, trên tử xuất hiện $a-1$, nhận xét rằng $a - 1 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)$, do đó, việc đầu tiên ta nghĩ tới sẽ là quy đồng phân số.

Lời giải. Với $a > 0, a \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1} \frac{a-1}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{4\sqrt{a} + 4\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}} \\ &= 4a. \end{aligned}$$

Vậy với $a > 0, a \neq 1$ thì $P = 4a$. ■

Bình luận. Bài tập này tương đối đơn giản, chủ yếu kiểm tra sự tính toán, biến đổi cẩn thận của học sinh.

Ta cũng cần chú ý cách trình bày cho thật chính xác, chẳng hạn, luôn phải ghi điều kiện thích hợp, mặc dù đề bài đã nêu để đảm bảo tính chặt chẽ.

Da phần dạng toán này, ta thường quy đồng mẫu, rồi tính toán, rút gọn. Tuy nhiên, có