Bình luận. Đây là một bài hình học hay, khác thác vấn đề tứ giác nội tiếp đường tròn rất tốt, đòi hỏi học sinh phải có khả năng nhìn hình tốt để nhận thấy các tứ giác nội tiếp có trong hình.

Câu a tương đối dễ.

Câu b là một trường hợp cụ thể khi có thêm giả thiết $AB = AM$, nên ta cần vẽ một hình khác để có thể có dự đoán tốt hơn. Hình vẽ đúng, đẹp luôn giúp ích rất nhiều trong việc phân tích tìm hướng giải bài toán.

Câu c (cũng như các câu tìm GTLN, GTNN trong hình học) mấu chốt luôn là việc tìm ra được giá trị đó.

7 Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định

Bài 1

a) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geqslant 1$.

b) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=3$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = (a-3)^{2017}.(b-3)^{2018}.(c-3)^{2019}$.

a) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geqslant 1$.

Phân tích. Để tìm số tự nhiên x thỏa bất phương trình thì đầu tiên ta sẽ giải bất phương trình để tìm ra tập nghiệm rồi tìm các số tự nhiên x trong tập nghiệm đó.

Để giải bất phương trình này ta chỉ cần quy đồng và rút gọn.

Lời giải. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geqslant 1$ (1)

ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 1$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}.\dfrac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 4$

Với điều kiện $x \in \mathbb{N}$ ta suy ra $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. ■

Bình luận. Câu này khá đơn giản nhưng cần lưu ý đọc kỹ đề bài nếu không sẽ chỉ giải bất phương trình rồi quên tìm các số tự nhiên x.

Bài tập tương tự.

Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \geqslant 1$$

Bùi Tiến Lộc -SV ĐHSP TPHCM

b) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a + b + c = 3$ và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3}$.
Tính giá trị biểu thức $P = (a-3)^{2017}.(b-3)^{2018}.(c-3)^{2019}$

Phân tích. Với các bài cho giả thiết với vai trò a, b, c như nhau thông thường ta sẽ biến đổi để ra các đẳng thức mới rồi thế vào biểu thức cần tính.

Lời giải. Ta có: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{ab+bc+ca}{abc} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow abc - 3ab - 3bc - 3ca = 0$

Ta tính: $(a-3)(b-3)(c-3) = abc - 3ab - 3bc - 3ca + 9a + 9b + 9c - 27 = 0$

Suy ra $P = (a-3)^{2017}.(b-3)^{2018}.(c-3)^{2019} = 0$. ■

Bình luận. Các bài tính giá trị biểu thức dạng này khá đơn giản. Với giả thiết là các biểu thức với vai trò của a, b, c như nhau và biểu thức cần tính với số với mũ của a, b, c không bằng nhau thì thường biểu thức cần tính sẽ có giá trị bằng 0. Do đó ta có thể dễ dàng dự đoán trước kết quả của các bài dạng này.

Bài tập tương tự.
Với a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a + b + c = 2$ và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$.
Tính giá trị biểu thức

$$P = (a-2)^{2018}.(b-2)^{2019}.(c-2)^{2020}.$$

Bùi Tiến Lộc -SV ĐHSP TPHCM

Bài 2

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+6x+5}+1\right)=4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \\ x^2-3x-4\sqrt{y}+10=0. \end{cases}$

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+6x+5}+1\right)=4$.

Phân tích. Ta dễ dàng nhận thấy phương trình này có dạng $(a-b)(ab+1)=4$ với $a^2-b^2=4$ nên ta nghĩ ngay đến việc đặt $\sqrt{x+5}=a; \sqrt{x+1}=b$ ta sẽ được hệ phương trình.

Tuy nhiên nếu tinh ý hơn ta sẽ thấy $a^2-b^2=4=VP$ nên khi ta nhân lượng liên hợp ta sẽ được phương trình tương đương có dạng $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}(a-1)(b-1)=0$.

Lời giải. Cách 1

$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+6x+5}+1\right)=4$ (1)

ĐKXĐ: $\begin{cases} x+5\geqslant 0 \\ x+1\geqslant 0 \\ x^2+6x+5\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant -1$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+5}=a \\ \sqrt{x+1}=b \end{cases} \quad (a,b\geqslant 0)$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (a-b)(ab+1)=4 & \text{(i)} \\ a^2-b^2=4 & \text{(ii)} \end{cases}$

Thay (ii) vào (i) ta được: $(a-b)(ab+1)=a^2-b^2$

$\Leftrightarrow (a-b)(ab-a-b+1)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a-1)(b-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \text{ (vô lý)} \\ a=1 \\ b=1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5}=1 \\ \sqrt{x+1}=1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \text{ (loại)} \\ x = 0 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Vậy $x = 0$

Cách 2

ĐKXĐ: $\begin{cases} x+5 \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ x^2+6x+5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant -1$

$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+6x+5}+1\right) = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{(x+5)(x+1)}+1\right) = 4$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{(x+5)(x+1)}+1\right) = 4\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{(x+5)(x+1)}-\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}+1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ■

Bình luận. Bài phương trình căn thức dạng này khá đơn giản. Theo kinh nghiệm thì học sinh sẽ lựa chọn cách đặt ẩn phụ hơn là cách nhân lượng liên hợp vì khi học sinh nhìn thấy dạng quen thuộc sẽ áp dụng ngay cách được học mà ít khi nào phân tích kỹ đề bài để đi đến cách 2.

Bài tập tương tự.

1) Giải phương trình

$$\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+1\right) = 2.$$

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

(Bài này nếu học sinh tinh ý sẽ thấy ngay phương trình vô nghiệm)

2) Giải phương trình

$$\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+1\right) = -2.$$

Bùi Tiến Lộc -SV ĐHSP TPHCM

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ x^2-3x-4\sqrt{y}+10 = 0. \end{cases}$

Phân tích. Khi giải các bài hệ phương trình ta thường thử 2 cách cơ bản nhất là: "thế" hoặc là "cộng đại số". Khi dùng phương pháp "thế" ta sẽ nhận được phương trình căn thức khá là phức tạp và nếu đi giải sẽ rất mất thời gian và khả năng sai sót trong quá trình giải là rất cao.

Khi dùng phương pháp "cộng đại số" ta khó có thể triệt tiêu y ở một trong hai phương trình.

Do đó ta thử cách dùng bất đẳng thức để dẫn đến $VT \geqslant VP$ hoặc $VT \leqslant VP$ rồi dùng điều kiện đẳng thức để tìm x, y.

Lời giải. Áp dụng BDT BCS: $\sqrt{x+2}+\sqrt{3.3y} \leqslant \sqrt{4\left(x+3y+2\right)} = 2\sqrt{\left(x+3y+2\right)}$

Dấu "=" khi $x+2=y$

Thế vào PT2 ta có: $x^2-3x-4\sqrt{x+2}+10=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+x+6-4\sqrt{x+2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+\dfrac{\left(x+6\right)^2-16\left(x+2\right)}{x+6+4\sqrt{x+2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+\dfrac{\left(x-2\right)^2}{x+6+4\sqrt{x+2}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2\left(1+\dfrac{1}{x+6+4\sqrt{x+2}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ■

Bình luận. Bài hệ phương trình dạng này không quá khó nhưng đòi hỏi học sinh phải vận dụng thành thạo các bất đẳng thức thông dụng.

Bài tập tương tự.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+2y-1}-3\sqrt{2y+1}=4\sqrt{x-2} \\ x^2-4x+2\sqrt{x-2}+1=0. \end{cases}$

Bùi Tiến Lộc -SV ĐHSP TPHCM

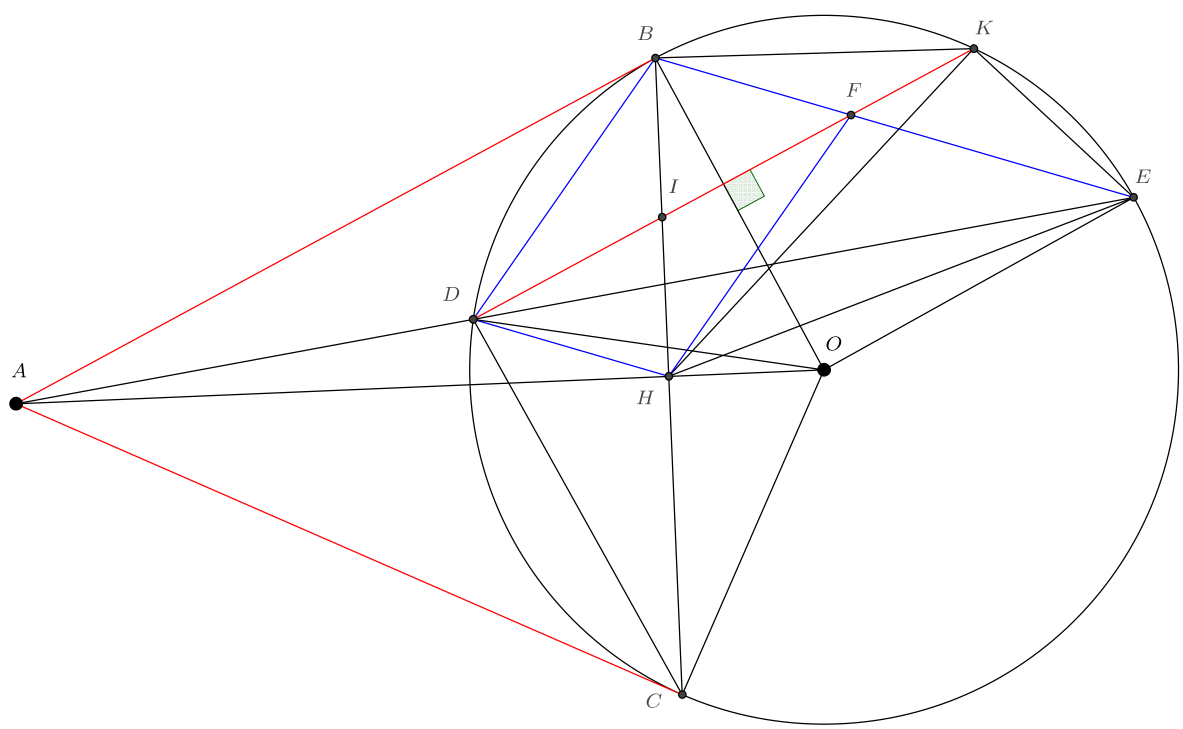
Bài 3

Cho đường tròn (O) , từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) $(B, C$ là các điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, I là trung điểm của BH. Đường thẳng qua I vuông góc với OB cắt (O) tại hai điểm D, K (D thuộc cung nhỏ BC). Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. DK cắt BE tại F.

a) Chứng minh $ICEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH}$.

c) Chứng minh rằng: $BD.CE = BE.CD$ và $BF.CE^2 = BE.CD^2$.



Phân tích. Ở câu a) với giả thiết $DI \perp BO$ ta dễ dàng suy ra $AB \parallel DI$ cùng với giả thiết tiếp tuyến ta cũng dễ dàng suy ra được tứ giác $ICEF$ nội tiếp.

Câu b) ta phân tích như sau: $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH} \Leftrightarrow$ K nằm trên đường tròn (B) bán kính $BD = BH \Leftrightarrow BD^2 = BH^2 = 2BI.\dfrac{1}{2}BC = BI.BC \Leftrightarrow \Delta BID \sim \Delta BDC$.

Câu c) ta phân tích như sau: