Lời giải. **Câu a)** Giả sử phương trình vô nghiệm,suy ra

$$\begin{cases} a^2 - 4b < 0 \\ c^2 - 4d < 0. \end{cases} \Rightarrow a^2 + c^2 - 4(b+d) < 0 \Rightarrow \frac{a^2+c^2}{b+d} < 4.$$

Mặt khác theo giả thiết ta có $\dfrac{a^2+b^2}{b+b} \geq 2\dfrac{ac}{b+d} \geq 4$. Do đó, điều giả sử là sai giả thiết. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu b) Phương trình đã cho tương đương $x^2 - xy - (y^2+8) = 0$. $(*)$

Coi $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn x với y là tham số, ta có

$$\Delta = 5y^2 + 32.$$

Ta có Δ chia 5 dư 2 nên có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7. Do đó, Δ không phải là số chính phương suy ra $(*)$ không có nghiệm nguyên.

Vậy không tồn tại x, y nguyên thỏa $(*)$. ■

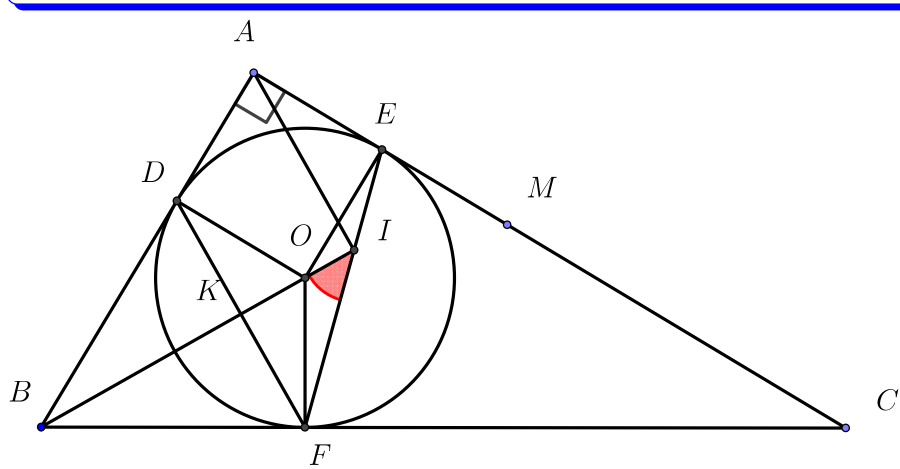
Bài 4

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của O với các cạnh AB, AC, BC; I là giao điểm của BO với EF; M là điểm di động trên đoạn CE.

a) Tính số đo góc $\widehat{BIF}$.

b) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác $ABHI$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi N là giao điểm cả BM với cung nhỏ EF của (O); P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của N lên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để độ dài PQ lớn nhất.

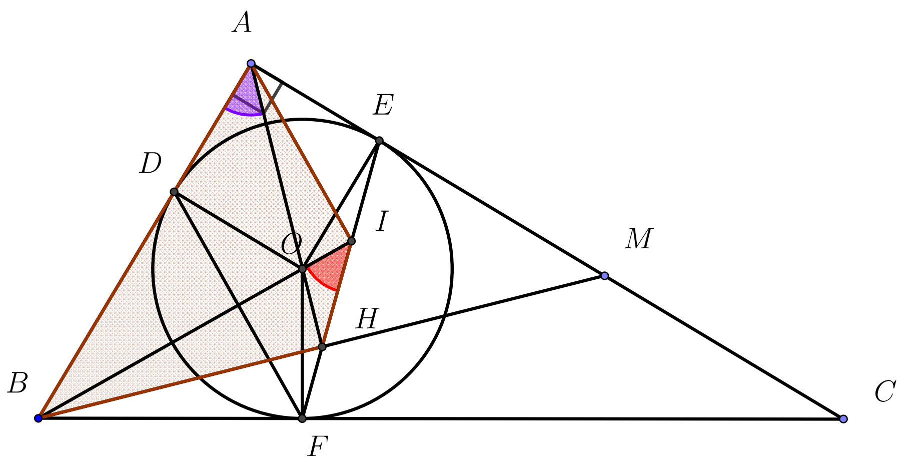


Phân tích. **Câu a)** Với yêu cầu tính góc trong bài hình có đường tròn, ta thường tìm cách biến đổi để đưa về tổng, hiệu của các góc nội tiếp hoặc góc ở tâm để dễ phân tích và biến đổi. Dựa vào hình ta dễ thấy góc $\widehat{BIF}$ là góc ΔKIF vuông tại K và góc $\widehat{IFK}$ là góc nội tiếp, nên ta sẽ phân tích

$$\widehat{BIF} = 90^o - \widehat{IFK}.$$

Việc tính góc $\widehat{IFK}$ tương đối đơn giản.

Lời giải. Gọi K là giao điểm của BO và DF. Suy ra $\widehat{IKF} = 90^o$.
Dễ thấy $DAOE$ là hình chữ nhật, suy ra $\widehat{DFI} = \dfrac{1}{2}\widehat{DOE} = 45^o$.
Do đó, góc $\widehat{BIF} = 45^o$. ■



Câu b.

Phân tích. Có nhiều cách chứng minh một tứ giác nội tiếp. Tuy nhiên, ở câu a, ta đã tính được góc $\widehat{BIF} = 45^o$, do đó ta sẽ chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{BIH}$ để chứng minh tứ giác $ABHI$ nội tiếp. Bài toán quy về việc tính $\widehat{BAH} = 45^o$.
Theo giả thiết của bài toán, ta có ΔABM vuông cân tại A. Mặt khác quan sát hình trong trường hợp này, ta thấy A, O, H thẳng hàng, mà $AO \perp BM$ nên suy ra $AH \perp BM$ suy ra AH là đường cao trong tam giác cân. Từ đó, ta có thể tính được $\widehat{BAH} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 45^o$. Giải quyết xong bài toán.
Như vậy việc còn lại là ta cần chứng minh điều ta quan sát là đúng, tức là A, O, H thẳng hàng. Cách chứng minh hiển nhiên nhất trong trường hợp này là chứng minh $OH \perp BM$.

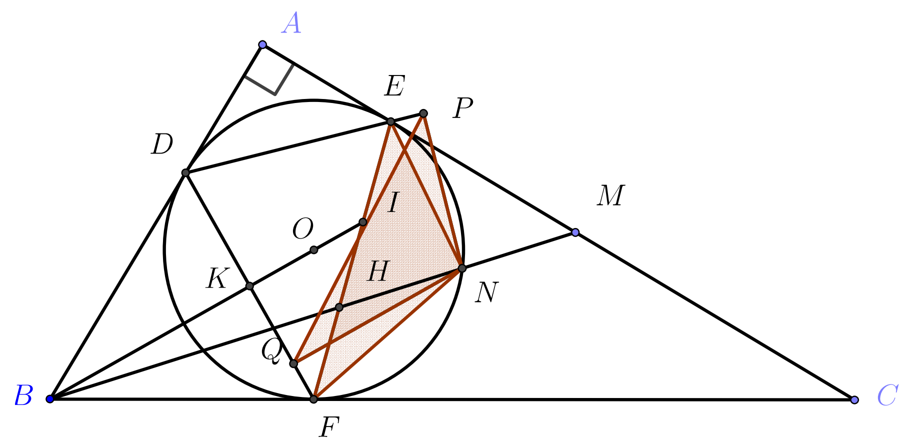
Lời giải. Tam giác ABM vuông cân tại A, suy ra $\widehat{ABD} = 45^o$.
Do đó, $\widehat{DBH} = \widehat{DFH} = 45^o$.

Suy ra tứ giác $DBFH$ nội tiếp đường tròn.

Dễ thấy $ODBF$ nội tiếp đường tròn đường kính BO nên B, D, O, H, F cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{OHB} = 90^o$.

Mà $AO \perp BM$ (O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC) nên $AH \perp BM$ và $\widehat{BAH} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 45^o = \widehat{BIH}$.

Do đó, $ABHI$ nội tiếp. ■



Câu c)

Phân tích. Đối với các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong hình học, ta thường tìm ra GTLN, GTNN trước để có được hướng giải đúng. Giá trị đó có thể tìm được thông qua việc vẽ một số trường hợp cụ thể và tìm ra quy luật, nhật xét. Trong bài này, thay đổi một số vị trí của M ta có nhận xét sau:

P thay đổi xung quanh vị trí của E và Q thay đổi xung quanh vị trí của F.

Do đó, ta dự đoán $PQ \leq EF$ và đi chứng minh điều này.

Ta cũng có NP luôn nhỏ hơn NE. Do đó, ta nghĩ tới việc chứng minh $\dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NP}{NE}$.

Tới đây, công việc quy về chứng minh $\Delta NPQ \sim \Delta NEF$. Về mặt hình ảnh, ta nhận thấy hai tam giác này có thể đồng dạng với nhau nên hướng đi trên có thể khả thi.

Lời giải. Do $NQDP$ nội tiếp nên $\widehat{NPQ} = \widehat{NDQ} = \widehat{NDF} = \widehat{NEF}$.

Tương tự ta có $\widehat{NQP} = \widehat{NFE}$ nên $\Delta NPQ \sim \Delta NEF$.

Suy ra $\dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NP}{NE} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $NP = NE$ hay P trùng E. Khi đó, $NE \perp DE$, tức là ΔNDE vuông tại E, suy ra DN là đường kính.

Vậy M là giao điểm của BN và AC với N được xác định sao cho DN là đường kính của (O) thì PQ có độ dài lớn nhất. ■

Bình luận. Đây là một bài hình học hay, khác thác vấn đề tứ giác nội tiếp đường tròn rất tốt, đòi hỏi học sinh phải có khả năng nhìn hình tốt để nhận thấy các tứ giác nội tiếp có trong hình.
Câu a tương đối dễ.
Câu b là một trường hợp cụ thể khi có thêm giả thiết $AB = AM$, nên ta cần vẽ một hình khác để có thể có dự đoán tốt hơn. Hình vẽ đúng, đẹp luôn giúp ích rất nhiều trong việc phân tích tìm hướng giải bài toán.
Câu c (cũng như các câu tìm GTLN, GTNN trong hình học) mấu chốt luôn là việc tìm ra được giá trị đó.

7 Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định

Bài 1

a) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geqslant 1$.

b) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c = 3$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = (a-3)^{2017}.(b-3)^{2018}.(c-3)^{2019}$.

a) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geqslant 1$.

Phân tích. Để tìm số tự nhiên x thỏa bất phương trình thì đầu tiên ta sẽ giải bất phương trình để tìm ra tập nghiệm rồi tìm các số tự nhiên x trong tập nghiệm đó.

Để giải bất phương trình này ta chỉ cần quy đồng và rút gọn.

Lời giải. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geqslant 1$ (1)

ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 1$

$(1) \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} . \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} - 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \geqslant 0$