6 Đề thi tuyển sinh trường THPT chuyên, Bình Dương, 2017

Bài 1

a) Giải phương trình $x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - |x| = |yz| \\ y^2 - |y| = |zx| \\ z^2 - |x| = |xy|. \end{cases}$

Câu a)

Phân tích. Một phương pháp hay làm trong các bài phương trình vô tỷ là bình phương hai vế làm mất căn. Tuy nhiên, phương này được coi là "may rủi" trong trường hợp này khi bậc của phương trình mới là bậc 4. Ta hãy cứ thử bình phương xem sao, liệu có "may" hay không?

Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$2x^4 - 18x^3 + 32x^2 - 18x + 2 = 0.$$

Nhận xét các hệ số của phương trình, ta dễ dàng nhận thấy đây là phương trình đối xứng bậc chẵn. Thật may!

Hãy thử phân tích để tìm ra một cách giải khác.

Lời giải. **Cách 1.** Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$2x^4 - 18x^3 + 32x^2 - 18x + 2 = 0.$$

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế phương trình cho x^2 ta được

$$2x^2 - 18x + 32 - \frac{18}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ (DK: $|t| \geq \sqrt{2}$). Khi đó, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Thế vào phương trình (1) ta được

$$t^2 - 9t + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 2 & \text{(nhận)} \\ t = 7. & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $t = 2$ suy ra $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Thế lại ta thấy $x = 1$ thỏa phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương

$$(x^2 - x + 1) - 2x = \frac{-\sqrt{3}}{3}\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}.$$

Đặt $x^2 - x + 1 = a$ và $x^2 + x + 1 = b$ $(a, b > 0)$. Khi đó, $b - a = 2x$ và phương trình đã cho trở thành

$$2a - b = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{ab}. \quad (2)$$

Do VP (1)≤ 0 nên suy ra $b \geq 2a$. Khi đó, (2) tương đương với

$$\begin{aligned}(2a - b)^2 = \frac{ab}{3} &\Leftrightarrow 12a^2 - 13ab + 3b^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (4a - 3b)(3a - b) = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b = \dfrac{4}{3}a & \text{(loại)}\\ b = 3a. & \text{(nhận)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $b = 3a$ thế vào $b - a = 2x$ ta được $a = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bình luận. Đây là một bài phương trình vô tỷ tương đối đơn giản và có hướng làm rõ ràng. Phương trình có được sau khi bình phương là một dạng phương trình quen thuộc và đã có phương pháp giải cụ thể.

Ngoài ra, không khó nhẩm được một nghiệm của phương trình là $x = 1$. Khi đó, phương pháp bình phương hai vế có thêm cơ sở cho tính khả thi của nó trong trường hợp này. Ta có thể giải bài toán theo một cách đơn giản hơn

$$\begin{aligned}&2x^4 - 18x^3 + 32x^2 - 18x + 2 = 0\\ \Leftrightarrow&(x - 1)^2(x^2 - 7x + 1) = 0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l} x = 1\\ x^2 - 7x + 1 = 0. \quad \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Một điều cần chú ý trong bài tập này là khi bình phương hai vế của phương trình sẽ dẫn đến phương trình hệ quả. Do đó, ta phải thử lại nghiệm (như trong cách 1) hoặc phải đặt điều kiện để hai vế của phương trình cùng dấu (như trong cách 2) để tránh nhận nghiệm ngoại lai.

Câu b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - |x| = |yz| \\ y^2 - |y| = |zx| \\ z^2 - |x| = |xy|. \end{cases}$

Phân tích. Đây là một hệ phương trình ba ẩn xoay vòng. Hệ đã cho đương đương với
$$\begin{cases} |x|(|x| - 1) = |yz| \\ |y|(|y| - 1|) = |zx| \\ |z|(|z| - 1) = |xy|. \end{cases}$$
Nhận thấy VT và VP của các phương trình đều ở dạng tích nên ta nghĩ tới cách nhân theo vế của các phương trình và đặt nhân tử chung là một cách làm thường gặp cho loại hệ này.

Lời giải. Hệ đã cho đương đương với $\begin{cases} |x|(|x| - 1) = |yz| \\ |y|(|y| - 1|) = |zx| \\ |z|(|z| - 1) = |xy|. \end{cases}$

Nhân vế theo vế ta được
$$|xyz|(|x|-1)(|y|-1)(|z|-1) = |yz||zx||xy| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |xyz| = 0 \\ (|x| - 1)(|y| - 1)(|z| - 1) = |x|\,|y|\,|z|\,. \end{array} \right. \qquad (*)$$
Mà $|x| - 1 < |x|; |y| - 1 < |y|; |z - 1| < |z|$ suy ra $(|x| - 1)(|y| - 1)(|z| - 1) < |x|\,|y|\,|z|\,.$
nên $(*)$ tương đương $|xyz| = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0.$
Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(0; 0; 0)$.

Bình luận. Bài hệ phương trình này cũng thuộc dạng cơ bản của hệ phương trình xoay vòng. Việc chứng minh phương trình $(|x|-1)(|y|-1)(|z|-1) = |x|\,|y|\,|z|$ vô nghiệm cũng dễ dàng nhận thấy, chỉ cần một chút cẩn thận trong biến đổi là HS có thể lấy trọn điểm câu này.

■

Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình $\sqrt{2}(x^2 + x - 2) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 4}$.

Nguyễn Thị Tuyết Như, SV ĐHSPTPHCM

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2010^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2010^3. \end{cases}$

Trích đề thi chọn đội tuyển HSG Ninh Bình, 2010-2011

HD. Ta có $x^3 + y^3 + z^3 \leq |x|^3 + |y|^3 + |z|^3 \leq 2010^3$ nên đẳng thức phải xảy ra.

■

Bài 2

Với x, y là các số thực dương thỏa mãn $x \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

Phân tích. Trong giả thiết của bài toán, ta để ý đến $x \geq 2y$, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho hai số x^2 và $4y^2$. Khi đó, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$.

Lời giải. Ta có $M = \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{x^2 + 4y^2}{xy} - \dfrac{3y^2}{xy} \geq \dfrac{4xy}{xy} - \dfrac{3y}{x} \geq 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$.

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất là $M = \dfrac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = 2y$. ■

Bình luận. Đây là bài bất đẳng thức có điều kiện của biến đơn giản, chỉ cần để ý đến giả thiết của bài toán là ta có thể dễ dàng tìm ra hướng đi đúng.

Bài tập tương tự.

1. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x \geq 4y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)\sqrt{xy}$.

Nguyễn Thị Tuyết Như. SV ĐHSP TPHCM

Bài 3

a) Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn: $b + d \neq 0$ và $\dfrac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$ (x là ẩn) luôn có nghiệm.

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - y^2 = xy + 8$.

Phân tích. Câu a) Giả thiết của bài toán tương đối đơn giản, khó khai thác nên ta sẽ thử xuất phát từ yêu cầu chứng minh.
Yêu câu chứng minh dẫn đến một tuyển phương trình. Giải một tuyển phương trình là một dạng bài tập không thường gặp. trong trường hợp này, ta sẽ sử dụng phương pháp phản chứng để chuyển từ giải tuyển phương trình về việc giải một thành hệ phương trình - dạng bài toán khá quen thuộc.