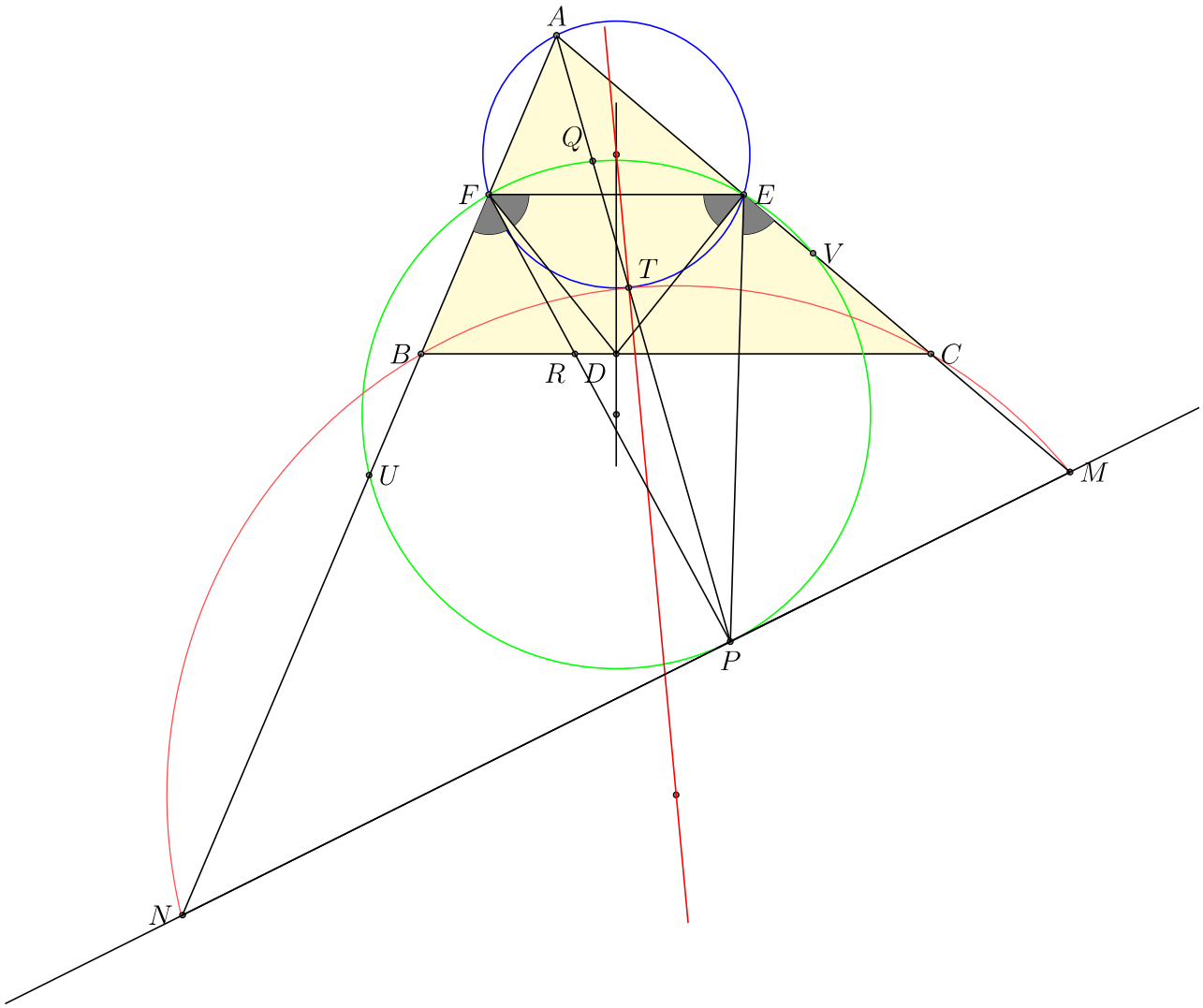


Lời giải. a) Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{EQF} &= 180^o - \widehat{EPF} = \widehat{PFE} + \widehat{PEF}\\ &= \widehat{BFD} + \widehat{CED} = (\widehat{FAD} + \widehat{FDA}) + (\widehat{EAD} + \widehat{EDA})\\ &= \widehat{BAC} + \widehat{EDF}.\end{aligned}$$

b) **Cách 1.** Gọi R là giao điểm của PE và BC.

Ta có $\widehat{PEM} = \widehat{DEF} = \widehat{DFE} = \widehat{RFB}$ (do D thuộc đường trung trực của EF).

Mặt khác ta cũng có:

$$\begin{cases} \widehat{EPM} = \widehat{EFP} & \text{(cùng chắn cung } PE) \\ \widehat{EFP} = \widehat{FRB} & \text{(do } EF//BC). \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\widehat{EPM} = \widehat{FRB}$.

Do đó $\triangle PEM \sim \triangle RFB$ (g-g). Suy ra $\widehat{FBR} = \widehat{EMP}$ hay $\widehat{ABC} = \widehat{NMC}$.

Vậy $NBMC$ nội tiếp (đpcm).

Cách 2. Gọi T là giao điểm thứ hai của AP với (AEF).

Ta có $\widehat{QFT} = \widehat{QFE} + \widehat{EFT} = \widehat{EAT} + \widehat{EPQ} = \widehat{PEC} = \widehat{DEF} = \widehat{DFE} = \widehat{BFP}$.

Suy ra tứ giác $FTPN$ nội tiếp. Tương tự $TEMP$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BNM} = \widehat{FTA} = \widehat{FEA} = \widehat{BCA}$.

Do đó $BNCM$ nội tiếp (đpcm).

c) Ta có $\widehat{PFE} = \widehat{DFB}, \widehat{PEC} = \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{PAC}$ (Bổ đề đẳng giác).

Suy ra $\widehat{FAT} = \widehat{DAC}$. Mặt khác $\widehat{ATF} = \widehat{AEF} = \widehat{ACD}$.

Nên $\Delta FQT \sim \Delta DEC$ mà E là trùn điểm AC.

Do đó, Q là trung điểm AT.

Suy ra $FQ//BT$.

Nên $\widehat{TBC} = \widehat{QFE} = \widehat{TPE} = \widehat{TME}$.

Suy ra tứ giác $BTCM$ nội tiếp.

Ta có (AEF) tiếp xúc với (BTM) khi và chỉ khi:

$\widehat{FTN} = \widehat{FET} + \widehat{TMN} \Leftrightarrow \widehat{FPN} = \widehat{FET} + \widehat{TEP} = \widehat{FEP}$ (đúng do MN tiếp xúc với (EFP)).

Vậy ta có điều phải chứng minh.

■

Bình luận. Bài toán có cấu trúc từ dễ tới khó rất rõ ràng. Câu a) dễ b) tương đối và câu c) khá khó. Học sinh cần phân tích kỹ đề, vận dụng các tính chất nội tiếp, các bổ đề phụ như bổ đề đẳng giác v.v... Ngoài ra, học sinh cần vẽ thêm các yếu tố để bài toán trở nên đơn giản hơn.

Bài tập tương tự.

1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O có $AB < AC$. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H (D thuộc AC, E thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia MH cắt (O) tại N.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, D, H, E, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Lấy điểm P trên cạnh BC sao cho $\widehat{BHP} = \widehat{CHM}$, Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng HP. Chứng minh rằng tứ giác $DENQ$ là hình thang cân.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Trích đề thi vào lớp 10 chuyên, Hải Phòng năm 2016

2. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm BC. Tia MH cắt (O) tại điểm P.

   1) Chứng minh $\Delta BPC' \sim \Delta CPB'$.

   2) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}, \widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB, AC tại E, F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF, K là giao điểm của HM và AO'.

      a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ nội tiếp.

      b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Trích đề thi vào lớp 10 chuyên, Hà Nội năm 2016

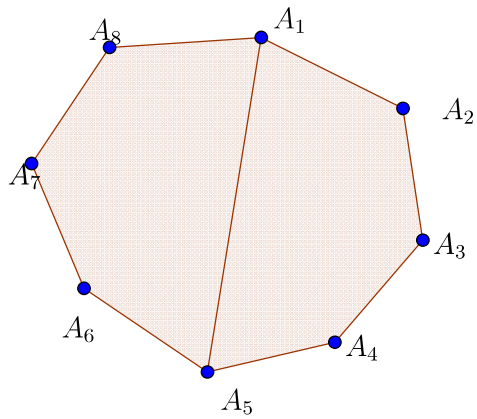
Bài 4

Cho n là số nguyên dương, $n \geqslant 5$. Xét một đa giác lồi n cạnh. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác mà các đường chéo này chia đa giác đã cho thành đúng k miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm trong chung).

a) Chứng minh rằng ta có thể thực hiện được với $n = 2018, k = 672$.

b) Với $n = 2017, k = 672$ ta có thể thực hiện được không? Hãy giải thích.

Phân tích. a) Để hiểu rõ bài toán ta xét trường hợp đơn giản hơn sau đó phát triển lên: Cho một đa giác lồi 8 cạnh. Chứng minh tồn tại cách chia đa giác đó thành 2 miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).



Từ A_1 ta kẻ A_1A_5 chia đa giác 8 cạnh thành hai ngũ giác lồi (đôi một không có điểm chung trong) là $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $A_1A_5A_6A_7A_8$.

Dễ thấy hai ngũ giác này có dạng $A_1A_{3k+2}A_{3k+3}A_{3k+4}A_{3k+5}$ $(k = 0, 1)$.

Nếu tổng quát bài toán lên ta sẽ nhận thấy rằng đa giác $3k+5$ cạnh luôn chia được thành $k+1$ miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

b) Dễ đoán với $n = 2017, k = 672$ ta không thể thực hiện được phép chia như yêu cầu bài toán. Ta dễ thấy $2017 = 3.672 + 1$. Như vậy, ta có thể chứng minh quy nạp đa giác có dạng $3n+1$ cạnh không thể chia được thành n ngũ giác lồi (hai ngũ giác lồi không có điểm chung trong).

Ngoài ra, ta có thể sử dụng tính chất về tổng các góc trong một đa giác để tìm ra điều vô lí trong cách chia.

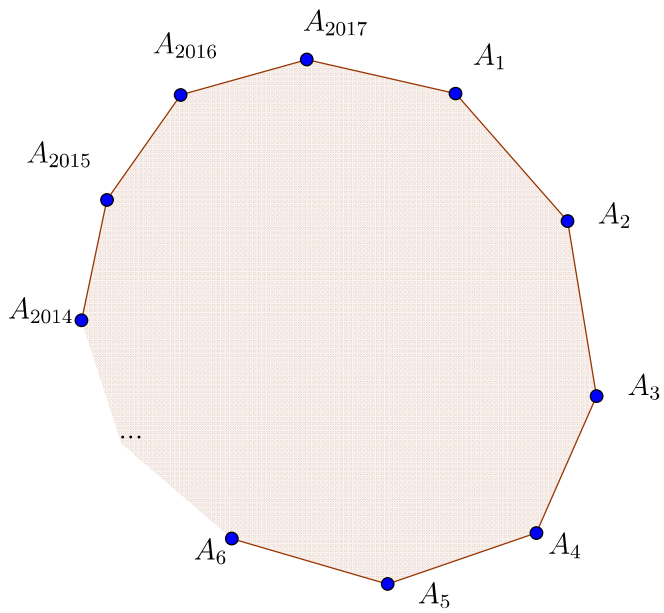
Lời giải. a) Cố định 1 điểm trong đa giác và gọi điểm đó là A_1. Theo chiều kim đồng hồ ta gọi các điểm tiếp theo là $A_2, A_3, A_4, ..., A_{2018}$.

Nối đỉnh A_1 với đỉnh A_5 ta được ngũ giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5$. Lại nối đỉnh A_1 với đỉnh A_8. Ta được ngũ giác lồi $A_1A_5A_6A_7A_8$.

Hay nói một cách tổng quát, ta nối đỉnh A_1 với đỉnh A_{3k+5} với $k = 0, 1, 2..., 670$ (chú ý rằng với trường hợp $k = 670$ khi nối đỉnh A_1 với đỉnh A_{2015} ta sẽ nhận được 2 ngũ giác là $A_1A_{2012}A_{2013}A_{2014}A_{2015}$ và $A_1A_{2015}A_{2016}A_{2017}A_{2018}$ tạo thành các ngũ giác lồi $A_1A_{3k+2}A_{3k+3}A_{3k+4}A_{3k+5}$ với $k = 0, 1, 2..., 671$ (do đa giác đã cho có 2018 đỉnh). Suy ra có 672 miền là ngũ giác lồi mà không có miền nào có điểm chung.

Vậy ta đã thực hiện được một cách chia đa giác 2018 đỉnh thành 672 miền sao cho mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

b) **Cách 1.**

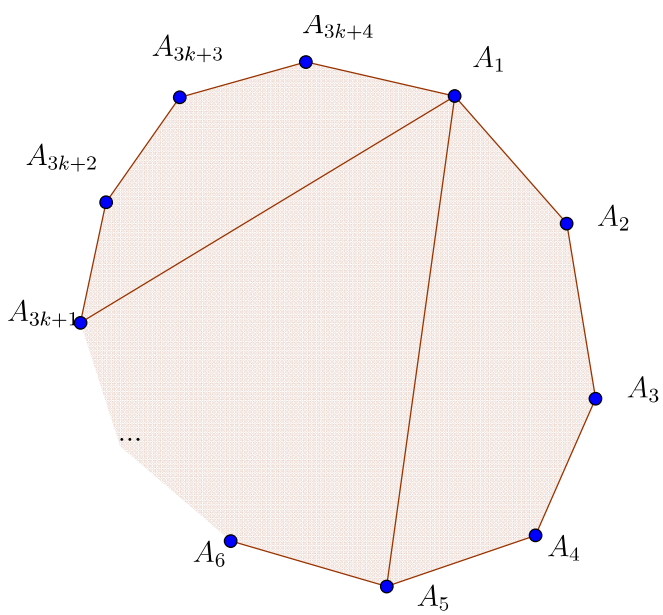


Giả sử đa giác 2017 cạnh chia thành 672 ngũ giác đôi một không có điểm trong chung. Thế thì tổng các góc trong của tất cả 672 ngũ giác là 272.540^o. Mặt khác, tổng các góc của đa giác 2017 cạnh là $(2017-2).180^o$ (sử dụng cách chia đa giác thành $(2017-2)$ tam giác đôi một không giao nhau để tính góc).

Từ đây ta suy ra $672.540^o = (2017-2).180^o$. (vô lí).

Vậy không tồn tại cách chia đa giác 2017 cạnh thành 672 ngũ giác lồi đôi một không có điểm chung trong.

Cách 2.



Quy nạp một đa giác $3n+1$ không thể chia thành n ngũ giác $(*)$.

- $n=1$ hiển nhiên đa giác 4 cạnh không thể chia thành 1 ngũ giác.
- Giả sử $(*)$ đúng tới $n=k$. Tức ta không thể chia một đa giác $3k+1$ không thể chia thành k ngũ giác.
- Với $n=k+1$. Xét đa giác $3k+4$ cạnh. Giả sử đa giác đó là $A_1A_2...A_{3k+4}$. Hiển nhiên $A_1A_2...A_{3k+4}$ luôn được chia ra thành hai đa giác $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}...A_{i_{3k+1}}$ và $A_{i_1}A_{i_{3k+1}}A_{i_{3k+2}}A_{i_{3k+3}}A_{i_{3k+4}}$ sao cho:

$$\begin{cases} A_1A_2...A_{3k+4} = A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}...A_{i_{3k+1}} \cup A_{i_1}A_{i_{3k+1}}A_{i_{3k+2}}A_{i_{3k+3}}A_{i_{3k+4}} \\ A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}...A_{i_{3k+1}} \cap A_{i_1}A_{i_{3k+1}}A_{i_{3k+2}}A_{i_{3k+3}}A_{i_{3k+4}} = A_{i_1}A_{i_{3k+1}} \end{cases}$$

trong đó $i_j \in \{1;2;3;..;3k+4\}$ và $i_m \neq i_n \quad \forall m \neq n$.

Do $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}...A_{i_{3k+1}}$ không chia được thành các ngũ giác đôi một không có điểm chung trong (giả thiết quy nạp) và $A_{i_1}A_{i_{3k+1}}A_{i_{3k+2}}A_{i_{3k+3}}A_{i_{3k+4}}$ là ngũ giác nên $A_1A_2...A_{3k+4}$ không chia được thành các ngũ giác đôi một không có điểm chung trong.

Vậy $(*)$ đúng với $n=k+1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Quay trở lại bài toán, ta có $2017 = 3.672+1$ có dạng $3n+1$ nên đa giác 2017 cạnh không thể chia thành 672 miền, mỗi miền là một ngũ giác (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

■

Bình luận. Đây là bài toán hay yêu cầu học sinh phải có khả năng tư duy trừu tượng kết hợp vận dụng các kiến thức về tổng các góc trong một đa giác, kiến thức về phương pháp quy nạp, tổng quát hóa một bài toán đơn giản ban đầu.

Bài tập tương tự.

1) Với điều kiện nào của n thì các đường chéo của đa giác lồi n cạnh chia đa giác thành k đúng miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

Phát triển bài toán trên

2) Các đường chéo của đa giác lồi $3n+7$ cạnh có thể chia đa giác thành n miền, mỗi miền là một thất giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong) hay không? Giải thích câu trả lời và đưa ra một phương án để thực hiện phép chia đó.

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM