Vậy k duy nhất.

Khi đó ta được $q^2 - 1 = kp \Leftrightarrow q^2 - 1 = k(kq+1) \Leftrightarrow q^2 - k^2q - k - 1 = 0$. (**)

Do phương trình $(**)$ có hai nghiệm nguyên nên $\Delta = k^4 + 4k + 4$ là bình phương của một số nguyên.

- $k = 1 \Rightarrow \Delta = 9$ giải ra ta được $p = 3, q = 2$.
- $k = 2 \Rightarrow \Delta = 12$ loại vì Δ chính phương.
- $k > 2 \Rightarrow (k^2)^2 < \Delta < (k^2+1)^2$ (loại do Δ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên Δ không thể là một số chính phương).

Cách 2. Ta có $p = kq + 1 > q - 1$ nên $(p, q-1) = 1$.

Mặt khác, $p \mid (q^2 - 1)$ suy ra $p \mid (q+1)$.

Khi đó ta có $q + 1 \geqslant p = kq + 1 \geqslant q + 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $q + 1 = p$. Thay vào $(*)$ ta giải ra được $p = 3, q = 2$.

Cách 3. Ta có $p = kq + 1 > q - 1$ nên $(p, q-1) = 1$.

Mặt khác, $p \mid (q^2 - 1)$ suy ra $p \mid (q+1)$ hay $q + 1 = mp = m(kq+1)$ (với $m \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó ta có: $q + 1 = m(kq+1) \Leftrightarrow q(mk - 1) = 1 - m$

Do $m, k \in \mathbb{N}^*$ nên $m = k = 1$. Vậy $q + 1 = p$.

Thay $q + 1 = p$ vào $(*)$ ta giải ra được $p = 3, q = 2$.

Cách 4. Ta có $p - 1 = kq, q^2 - 1 = kp \Rightarrow q^2 - p = k(p-q) \Rightarrow (p-q) \mid (q^2 - p)$.

Suy ra $(p-q) \mid (q^2 - q + q - p) \Rightarrow (p-q) \mid (q^2 - q)$.

Do đó $(p-q) \mid (q-1) \Rightarrow q - 1 \geqslant p - q \Leftrightarrow 2q \geqslant p + 1 \geqslant kq + 2$.

- $k = 1 \Rightarrow p = 3, q = 2$.
- $k \geqslant 2 \Rightarrow 2q \geq 2q + 2$ (vô lí).

Vậy $p = 3, q = 2$.

Cách 5. Xét trường hợp $p \neq q$.

Ta chứng minh được $p \mid q + 1$ (theo cách $2, 3$).

Ta cần chứng minh $q + 1 \mid p$.

Từ $(*)$ ta suy ra: $\left[\begin{array}{ll} q+1 \mid p & (1) \\ q+1 \mid p-1 & (2) \end{array}\right.$

- TH1: $q + 1 \mid p \Rightarrow q + 1 = p \Rightarrow p = 3, q = 2$.
- TH2: $q + 1 \mid p - 1 \Rightarrow p - 1 = m(q+1)$.

Từ $(*)$ suy ra

$$\begin{aligned}
& pm\left(q+1\right)=q\left(q+1\right)\left(q-1\right)\\
\Leftrightarrow\ & pm=q\left(q-1\right)\\
\Leftrightarrow\ & p\mid q-1\\
\Rightarrow\ & q-1\geqslant p\geqslant p-1\geqslant q+1.\quad \text{(vô lí)}
\end{aligned}$$

2)

Cách 1. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant\dfrac{4}{x+y},\forall x,y>0\qquad(*)$

Ta có $(*)$ tương đương với:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{x+y}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\left(x-y\right)^2}{xy\left(x+y\right)}\geqslant 0\quad\text{(luôn đúng).}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y$.

Do đó bất đẳng thức $(*)$ đã được chứng minh.

Quya trở lại bài toán ta có:

$$\begin{aligned}
& abc+ab+ac+bc=2\\
\Leftrightarrow\ & abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=a+b+c+3\\
\Leftrightarrow\ & \left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=\left(a+1\right)+\left(b+1\right)+\left(c+1\right)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\left(a+1\right)+\left(b+1\right)+\left(c+1\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}=1\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)}+\frac{1}{\left(b+1\right)\left(c+1\right)}+\frac{1}{\left(c+1\right)\left(a+1\right)}=1.
\end{aligned}$$

Đặt $a+1=\dfrac{\sqrt{3}}{x},b+1=\dfrac{\sqrt{3}}{y};c+1=\dfrac{\sqrt{3}}{z}$.

Khi đó giả thiết bài toán trở thành $xy + yz + zx = 3$ và:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} \\
&= \frac{a+1}{(a+1)^2+1} + \frac{b+1}{(b+1)^2+1} + \frac{c+1}{(c+1)^2+1} \\
&= \frac{1}{a+1+\dfrac{1}{a+1}} + \frac{1}{b+1+\dfrac{1}{b+1}} + \frac{1}{c+1+\dfrac{1}{c+1}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{y}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{z}+\dfrac{z}{\sqrt{3}}} \\
&= \sqrt{3}\left(\frac{x}{x^2+3} + \frac{y}{y^2+3} + \frac{z}{z^2+3}\right) \\
&= \sqrt{3}\left(\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)}\right) \\
&\leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y}\right) \quad \text{(áp dụng bất đẳng thức (*))} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Dẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3} - 1$.

Ngoài ra, khi đưa M về dạng $M = \sqrt{3}\left(\dfrac{x}{(x+y)(x+z)} + \dfrac{y}{(y+z)(y+x)} + \dfrac{z}{(z+x)(z+y)}\right)$ ta còn có thể giải bằng cách khác như sau:

Cách 2. Trước tiên ta chứng minh hai bất đẳng thức phụ sau:

i) $(x+y)(x+z)(z+y) \geqslant \dfrac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx), \forall x, y, z > 0.$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức (i) ta được:

$$x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geqslant 0. \quad \text{(luôn đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Vậy bất đẳng thức (i) đã được chứng minh.

ii) $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx), \forall x, y, z > 0.$

Biến đổi tương đương (ii) ta được:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqslant 0. \quad \text{(luôn đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Vậy bất đẳng thức (ii) đã được chứng minh.

Quay trở lại bài toán ta có:

$$\begin{aligned}
M &= \sqrt{3}\left(\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}\right)\\
&= \sqrt{3}\left(\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(x+z)(z+y)}\right)\\
&= \frac{2\sqrt{3}(xy+yz+zx)}{(x+y)(x+z)(z+y)}\\
&\leqslant \frac{9\sqrt{3}(xy+yz+zx)}{4(x+y+z)(xy+yz+zx)} \quad \text{(áp dụng } (i))\\
&= \frac{9\sqrt{3}}{4(x+y+z)}\\
&\leqslant \frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{3(xy+yz+zx)}} \quad \text{(áp dụng } (ii))\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}-1$.

■

Bình luận.

1) Bài toán khá hay khi khai thác rất sâu tính chia hết của số nguyên tố, điều kiện nguyên tố cùng nhau. Từ đó đưa ra các hướng đi thích hợp cho bài toán.

2) Đây là toán khá quen thuộc ở cấp độ THPT, tuy nhiên với chương trình THCS thì đây là bài toán tương đối khó trong việc khai thác giả thiết để đưa vào biểu thức M. Để giải bài toán yêu cầu học sinh cần bám sát biểu thức cần chứng minh kết hợp với kỹ năng biến đổi đại số thành thạo.

   Lưu ý. Một số điều kiện hay xuất hiện trong các kì thi và hướng giải quyết:

   - $abc=1$ đặt $a=\dfrac{x}{y}, b=\dfrac{y}{z}, c=\dfrac{z}{x}$.
   - $xyz=x+y+z+2$ đặt $x=\dfrac{b+c}{a}, y=\dfrac{c+a}{b}, z=\dfrac{a+b}{c}$.
   - $xy+yz+zx+2xyz=1$ đặt $x=\dfrac{a}{b+c}, y=\dfrac{b}{c+a}, z=\dfrac{c}{a+b}$.
   - $ab+bc+ca+abc=4$ đặt $a=\dfrac{2x}{y+z}, b=\dfrac{2y}{z+x}, c=\dfrac{2z}{x+y}$.

Bài tập tương tự.

1) a) Giải phương trình $x^3+y^3-3xy=p-1$. $(x,y\in\mathbb{N})$ với p là số nguyên tố.

Trích "những bài toán hay tập 1-Bùi Tá Long"

b) Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y + 1 = z$.

Trích "chuyên đề số học -Lê Đình Huân"

2) a) Chứng minh với mọi a, b, c không âm có $ab + bc + ca + abc = 4$ thì

$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

Trích đề thi học sinh giỏi quốc gia năm 1996

b) Cho $a, b, c \geqslant 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + abc \geqslant 10.$$

Trích "những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học"

Bài 3

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB. Trung trực của đoạn thẳng EF cắt BC tại D. Giả sử có điểm P nằm trong $\widehat{EAF}$ và nằm ngoài tam giác AEF sao cho $\widehat{PEC} = \widehat{DEF}$ và $\widehat{PFB} = \widehat{DFE}$. PA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P.

1) Chứng minh rằng $\widehat{EQF} = \widehat{BAC} + \widehat{EDF}$.

2) Biết tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF cắt các đường thẳng CA, AB lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm C, M, B, N cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này tên là đường tròn (K).

3) Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Phân tích. a) Biểu diễn $\widehat{EQF}$ theo các góc có liên quan tới $\widehat{BAC}$ và $\widehat{EDF}$. Chú ý, tính chất tổng ba góc trong một tam giác, tính chất góc ngoài tam giác...

b) Có khá nhiều cách để chứng minh một tứ giác nội tiếp. Tuy nhiên, với điều kiện bài toán ta có hai hướng đi rất rõ:

- $\widehat{ABC} = \widehat{NMC}$. Với hướng đi này, ta dễ thấy rằng $\widehat{RFB} = \widehat{PEM}$ ($R = BC \cap FB$). Do đó, ta chỉ cần chứng minh $\widehat{BRE} = \widehat{EPM}$ thì ta sẽ được điều phải chứng minh.
- $\widehat{BNM} = \widehat{BCA}$. Với hướng này, ta tập trung chứng minh $PTFN$ và $PTEM$ nội tiếp là ta có điều cần chứng minh.

c) Để chứng minh đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Ta chứng minh hai đường tròn có chung tiếp tuyến tại giao điểm của hai đường tròn.

Với ý tưởng này, ta có hướng đi rất rõ ràng như sau:

- Bước 1. Tìm điểm chung của hai đường tròn (Giả sử là điểm T).
- Bước 2. Chứng minh tiếp tuyến tại T của đường tròn (K) cũng chính là tiếp tuyến tại T của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF (hoặc tiếp tuyến tại T của đường tròn AEF cũng chính là tiếp tuyến tại T của đường tròn ngoại tiếp tam giác (K)).

  Hay chứng minh $\widehat{FTN} = \widehat{FET} + \widehat{TMN}$.