Phân tích. Theo đề, ta có thể suy ra được a_n phải là n vì nếu ngược lại giả sử tồn tại $n \neq n : \ a_i = n$ thì trong dãy $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2a_3...a_n$ sẽ có ít nhất 2 số chia hết cho n (trái với đề bài). Suy ra $a_1a_2a_3...a_{n-1} = (n-1)!$ và $a_1a_2a_3...a_n \vdots n$.
Từ suy luận đó cùng với n là hợp số, ta nghĩ đến một bổ đề: Nếu n là hợp số và $n > 4$ thì $(n-1)! \not\vdots n$.
Dựa vào bổ đề này ta có thể kết luận được $n = 4$ là kết quả cần tìm.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bổ đề sau: Nếu n là hợp số và $n > 4$ thì $(n-1)! \not\vdots n$.
Chứng minh: Vì n là hợp số lớn hơn 4 nên tồn tại a, b thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $1 < a < b < n$ và $n = a.b$. Suy ra $(n-1)! \not\vdots ab$ hay $(n-1)! \not\vdots n$.
Trước hết a_n phải là n vì nếu ngược lại giả sử tồn tại $n \neq n : \ a_i = n$ thì trong dãy $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2a_3...a_n$ sẽ có ít nhất 2 số chia hết cho n (trái với đề bài).
Suy ra $a_1a_2a_3...a_{n-1} = (n-1)!$ và $a_1a_2a_3...a_n \vdots n$.
Nếu $n > 4$ thì do n là hợp số nên $(n-1)! \not\vdots n$ hay $a_1a_2a_3...a_{n-1} \vdots n$ (loại).
Nếu $n = 4$ thì tồn tại một hoán vị của $1, 2, 3, 4$ là $1, 3, 2, 4$. Khi đó dãy số $1, 1.3, 1.3.2, 1.3.2.4$ sẽ có số dư $1, 3, 2, 0$ khi chia cho 4.
Vậy $n = 4$ là hợp số thỏa đề. ■

Bình luận. Bài tập này là một bài tập khó. Đầu tiên học sinh có khả năng quan sát cũng như nhận định tốt, ta có thể rút ra được nhận xét $a_n = n$. Không những vậy, bài tập này đòi hỏi học sinh phải có kiến thức rộng, biết được bổ đề mới có khả năng giải quyết được bài toán.

5 Đề thi tuyển sinh trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội (Vòng 2)

Bài 1

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = \sqrt{x + 3y} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy = 3 & (2). \end{cases}$

2) Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

Phân tích.

1) Ta dễ thấy rằng hệ số trước x, y ở phương trình (1) bằng nhau và cùng bằng 1. Tương tự, hệ số trước x^2, y^2 ở phương trình (2) đều cùng bằng 1.
Do đó, nếu bình phương hai vế phương trình (1) sau đó trừ phương trình (2) (trừ vế theo vế) thì ta sẽ triệt tiêu được x^2 và y^2. Khi đó, ta dễ dàng biểu thị mối liện hệ giữa x và y bằng phép biến đổi đại số.

2) Với điều kiện $ab + a + b = 1$, ta nghĩ ngay tới việc thay $1 = ab + a + b$ vào $1 + a^2$.
Khi đó ta được: $1 + a^2 = ab + a + b + a^2 = (a + 1)(a + b)$.
Tương tự: $1 + b^2 = ab + a + b + b^2 = (b + 1)(a + b)$.
Thay $1+a^2 = (a+1)(a+b)$ và $1+b^2 = (b+1)(a+b)$ vào biểu thức cần chứng minh sau đó thực hiện phép biến đổi tương đương ta sẽ có ngay điều phải chứng minh.

Lời giải.

1) ĐKXĐ: $x + y \geqslant 0$.

Từ (1) ta suy ra $x^2 + y^2 + 2xy = x + 3y \quad (*)$. Thay (2) vào $(*)$ ta được:

$$3 + xy = x + 3y \Leftrightarrow (x - 3)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1. \end{array}\right.$$

- Với $x = 3$ thì (2) trở thành: $y^2 + 3y + 6 = 0$ (vô nghiệm).
- Với $y = 1$ thì (2) trở thành:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad (\text{thỏa điều kiện } x + y \geqslant 0) \\ x = -2 \quad (\text{ không thỏa thỏa điều kiện } x + y \geqslant 0). \end{array}\right.$$

Thử lại, ta thấy $(x; y) = (1; 1)$ là nghiệm của hệ.

2)

Cách 1. *(Biến đổi tương đương ngay từ đầu)*

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a\left(1+b^2\right)+b\left(1+a^2\right)}{(1+a^2)(1+b^2)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(a+b)\left(1+ab\right)}{(1+a^2)(1+b^2)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)}=\frac{1}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}\qquad(\text{do } 1+ab>0)\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{2}\,(a+b)=\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\\
\Leftrightarrow\ &2(a+b)^2=(1+a^2)(1+b^2)\qquad(\text{do } ab+a+b=1)\\
\Leftrightarrow\ &(a+b)^2+(a+b)^2=(1+a^2)(1+b^2)\\
\Leftrightarrow\ &(a+b)^2+(1-ab)^2=(1+a^2)(1+b^2)\\
\Leftrightarrow\ &\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(1-2ab+a^2b^2\right)=1+a^2+b^2+a^2b^2\\
\Leftrightarrow\ &0=0\ \ (\text{luôn đúng}).
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

Cách 2. *(Biến đổi đại số sau đó biến đổi tương đương)*

Ta có: $1+a^2=ab+a+b+a^2=(a+1)(a+b)$.

Tương tự: $1+b^2=ab+a+b+b^2=(b+1)(a+b)$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}&=\frac{a}{(a+1)\,(a+b)}+\frac{b}{(b+1)\,(a+b)}\\
&=\frac{2ab+a+b}{(a+1)\,(b+1)\,(a+b)}\\
&=\frac{1+ab}{(a+1)\,(b+1)\,(a+b)}.
\end{aligned}.$$

Mặt khác: $\dfrac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}=\dfrac{1+ab}{\sqrt{2\,(a+1)\,(b+1)\,(a+b)^2}}=\dfrac{1+ab}{\sqrt{2\,(a+1)\,(b+1)}\,(a+b)}$.

Khi đó biểu thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned}
&\frac{1+ab}{(a+1)\,(b+1)\,(a+b)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\,(a+1)\,(b+1)}\,(a+b)}\\
\Leftrightarrow\ &(a+1)\,(b+1)=\sqrt{2\,(a+1)\,(b+1)}\\
\Leftrightarrow\ &ab+a+b+1=\sqrt{2\,(ab+a+b+1)}\\
\Leftrightarrow\ &2=2\ \ (\text{luôn đúng}).
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

■

Bình luận.

1) Đây là hệ tương đối đơn giản so với đề thi tuyển sinh vào trường trong những năm gần đây. Khá đơn giản để giải bằng toán bằng cách bình phương hai vế sau đó rút thế (hoặc trừ vế theo vế).

2) Bài toán không khó nhưng với cách khai thác lại khá hay với hướng đi rất rõ ràng từ việc phân tích $ab + a + b = 1$ sau đó thay vào $1 + a^2$ và $1 + b^2$. Học sinh chỉ cần cẩn thận trong các bước biến đổi tương đương là có thể dành điểm tối đa bài toán này.

Bài tập tương tự.

1) a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = \sqrt{2x + 3y + 4} \\ x^2 + 4y^2 + 2xy = 7. \end{cases}$

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = \sqrt{x^2 + 12y + 12} \\ 3x^2 + 9y^2 + 10xy = 22. \end{cases}$

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

2) a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $ab + ac + bc = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{c-b}{a^2+3} + \frac{a-c}{b^2+3} + \frac{b-a}{c^2+3} = 0.$$

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

b) Cho hai số thực a, b sao cho $|a| \neq |b|$ và $ab \geqslant 0$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{a-b}{a^2+ab} + \dfrac{a+b}{a^2-ab} = \dfrac{3a-b}{a^2-b^2}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + 2a^2b + 3b^3}{2a^3 + ab^2 + b^3}.$$

Trích đề thi vào lớp 10 chuyên, TP Hồ Chí Minh năm 2016

Bài 2

1) Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức:

$$p(p-1) = q(q^2-1) \qquad (*)$$

a) Chứng minh tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq, q^2-1 = kp$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức $(*)$.

2) Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+ac+bc+abc = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2c+2}.$$

Phân tích.

1) a) Với yêu cầu chứng minh tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq, q^2-1 = kp$ thì ta thì ta sẽ có hai hướng giải quyết bài toán bằng cách chứng minh:

- $p \mid q^2-1 \Rightarrow q^2-1 = kp$ thay vào $(*)$ ta được $p = 1 = kq$.
- $q \mid p-1 \Rightarrow p-1 = kq$ thay vào $(*)$ ta được $q^2-1 = kp$.

b) Hiển nhiên k là duy nhất do đó từ câu $a)$ ta được:
$q^2-1 = k(kq+1) \Rightarrow q^2-k^2q-k-1 = 0$.
Từ đó, ta quy bài toán về việc giải phương trình nghiệm nguyên theo hai biến q, k (chú ý chọn q nguyên tố).
Ngoài ra, khá đơn giản để có thể nhận ra $p = 3, q = 2$.
Mặc khác, từ $(*)$ ta chứng minh được $p \mid (q^2-1)$. Do đó $p \mid q-1$ hoặc $p \mid q+1$.
So sánh $p = 3, q = 2$ thì ta sẽ nghĩ ngay tới việc chứng minh $p = q+1$. Với hướng giải này ta cũng có rất nhiều hướng đi khác nhau để dẫn đến kết quả.

2) Gần như việc áp dụng trực tiếp giả thiết $ab+ac+bc+abc = 2$ vào bài toán là điều không thể. Do đó ta bắt đầu khai thác từ biểu thức M.
Vì vai trò của a, b, c trong M là như nhau nên ta chỉ cần xét một phân thức trong 3 phân thức sau đó thực hiện tương tự với hai phân thức còn lại.
Không mất tính tổng quát ta xét $\dfrac{a+1}{a^2+2a+2} = \dfrac{a+1}{(a+1)^2+1}$.
Tương tự với b, c ta sẽ nhận thấy rằng biểu thức M hoàn toàn có thể biểu thị qua $a+1, b+1, c+1$. Do đó, ta sẽ biến đổi giả thiết theo $a+1, b+1, c+1$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& abc+ab+ac+bc=2 \\
\Leftrightarrow\ & abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=a+b+c+3 \\
\Leftrightarrow\ & (a+1)(b+1)(c+1)=(a+1)+(b+1)+(c+1) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(b+1)(c+1)}+\frac{1}{(c+1)(a+1)}=1.
\end{aligned}$$

Để đơn giản bài toán, ta cần thay đổi biến của bài toán. Đối chiếu với giả thiết của bài toán ta nghĩ ngay tới việc đặt $a+1=\frac{1}{x}, b+1=\frac{1}{y}; c+1=\frac{1}{z}$.

Tuy nhiên, nếu phân tích sâu hơn ta sẽ nhận thấy điều kiện " = " của bài toán là $a=b=c=\sqrt{3}-1$ hay $a+1=b+1=c+1=\sqrt{3}$ nên việc đặt $a+1=\frac{\sqrt{3}}{x}, b+1=\frac{\sqrt{3}}{y}; c+1=\frac{\sqrt{3}}{z}$ sẽ giúp bài toán trở nên gọn gàng hơn..

Ngoài ra, bài toán còn có hướng đi khác là đưa M về 2 biến sau đó đánh giá M.

Lời giải.

1) a) **Cách 1.**

- Với $p=q$ thì $(*)$ trở thành: $p(p-1)=p(p^2-1)$.
  Giải ra ta được $p=1$ hoặc $p=0$ (vô lí do p là số nguyên tố).
- Với $p\neq q$.
  $p(p-1)=q(q^2-1)\Rightarrow p\mid q(q^2-1)\Rightarrow p\mid q^2-1$ (do $(p,q)=1$).
  Suy ra $q^2-1=kp\ \ (k\in\mathbb{N}^*)$. Thay vào $(*)$ ta được $p-1=kq$.
  Vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq, q^2-1=kp$.

Cách 2.

- Với $p=q$ giải ra ta được $p=1$ hoặc $p=0$ (vô lí do p là số nguyên tố).
- Với $p\neq q$.
  $p(p-1)=q(q^2-1)\Rightarrow q\mid p-1\Rightarrow p-1=kq$.
  Thay vào $(*)$ ta được $q^2-1=kp$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b)

Cách 1. Chứng minh k duy nhất.

Thật vậy, giả sử tồn tại k' $(k\neq k')$ thỏa $(*)$ tức là: $p-1=k'q, q^2-1=k'p$.

Từ đó suy ra $(p-1)-(p-1)=q(k-k')\Rightarrow k-k'=0\Rightarrow k=k'$. (vô lí)