Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi $a = b = 1$. ■

Bình luận. Điểm mấu chốt ở bài tập này đó là tìm ra được nhân tử nhân thêm vào rồi dùng bất đẳng thức BSC đánh giá được một phần của biểu thức. Để tìm được nhân tử nhân thêm này, ta cần quan sát xem ta đang muốn xuất hiện đa thức gì. Và để trả lời cho câu hỏi này, ta cần quan sát tổng quát biểu thức để nhận ra rằng ta cần rút gọn đa thức nào, và trong bài này, đó là $a + b$.

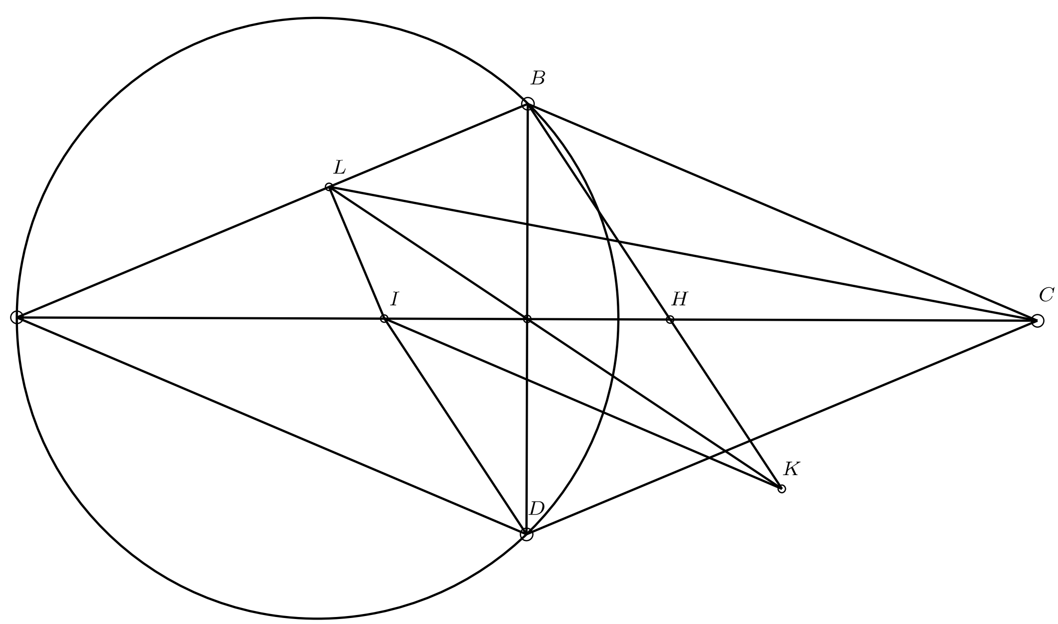
Bài 3

Cho hình thoi $ABCD$ với $\widehat{BAD} < 90°$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD và tiếp xúc với BD, BA lần lượt tại J, L. Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song với ID.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$.

b) Chứng minh rằng: $KC \perp KB$.

c) Chứng minh rằng: C, K, I, L cùng thuộc một đường tròn.



Phân tích. Ở câu a) vì $\widehat{ABJ} = \widehat{CBJ}$ nên để chứng minh $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$ ta cần chứng minh $\widehat{IBJ} = \widehat{HBJ}$, mà $BD \perp IH$ do đó ta cần chứng minh $IBHD$ là hình thoi. Để chứng minh $IBHD$ là hình thoi ta cần chứng minh $IBHD$ là hình bình hành. Vì BH song song với ID nên để chứng $IBHD$ là hình bình hành ta cần chứng minh $ID = BH$. Muốn chứng minh $ID = BH$, ta sẽ chứng minh tam giác BJH bằng tam giác DJI.
Ở câu b) Giả sử $\widehat{BKC} = 90°$, khi đó tứ giác $BCKJ$ nội tiếp (vì $\widehat{BJC} = 90°$). Vậy để chứng minh $\widehat{BKC} = 90°$ ta cần chứng minh tứ giác $BCKJ$ nội tiếp. Để chứng minh tứ giác $BCKJ$ nội tiếp ta cần chứng minh $\widehat{CJK} = \widehat{KBC}$. Mà $\widehat{CJK} = \widehat{LJI}$ và $\widehat{KBC} = \widehat{LBI}$ nên để chứng minh $\widehat{CJK} = \widehat{KBC}$ ta cần chứng minh $\widehat{LBI} = \widehat{LJI}$, do đó, ta cần chứng minh tứ giác $LBJI$ nội tiếp.
Ở câu c) Để chứng minh L, I, K, C thuộc cùng một đường tròn nghĩa là ta cần chứng minh tứ giác $LIKC$ nội tiếp. Hay nói cách khác, ta cần chứng minh $\widehat{ILK} = \widehat{KCI}$. Điều này có thể dễ chứng minh được vì $\widehat{ICK} = \widehat{JBK} = \widehat{IBJ} = \widehat{ILJ}$.

Lời giải. **a)** Gọi $BK \cap AC = H$. Ta có tam giác BIH bằng tam giác DJI (c-g-c) do đó $DI = BH$ nên tứ giác $IBHD$ là hình bình hành. Mà $BD \perp IH$ nên tứ giác $IBHD$ là hình thoi, suy ra $\widehat{IBJ} = \widehat{HBJ}$. Mà $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{ABJ} = \widehat{CBJ}$ do đó $\widehat{ABI} = \widehat{CBK}$.
b) Ta có $\widehat{ILB} = \widehat{IJB} = 90°$ nên tứ giác $LBIJ$ nội tiếp do đó $\widehat{KBC} = \widehat{ABI} = \widehat{LJI} = \widehat{KJC}$.
Suy ra tứ giác $BJKC$ nội tiếp, do đó $\widehat{BJC} = \widehat{BKC} = 90°$. Vậy $BC \perp KC$.
c) Vì $BJKC$ nội tiếp nên $\widehat{JCK} = \widehat{JBK} = \widehat{IBJ} = \widehat{ILJ}$ do đó L, I, K, C nội tiếp. ■

Bình luận. Câu a) là một câu khá dễ trong phần hình học, tuy nhiên để làm được câu này, học sinh cần nắm vững các dấu hiệu nhận biết hình thoi cũng như cách chứng minh hình bình hành, hình thoi.
Câu b) cũng không quá khó để học sinh có thể nhìn ra hướng giải. Để làm được câu này, học sinh cần nắm vững kiến thức về tứ giác nội tiếp đường tròn và việc vận dụng kết quả của câu trước như là một dữ liệu đề cho để giải quyết câu sau.
Hướng giải câu c) cũng không khó để tìm ra. Cũng như câu b), học sinh cần nắm vững kiến thức về tứ giác nội tiếp đường tròn và việc vận dụng kết quả của câu trước.

Bài 4

Tìm hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại 1 cách sắp xếp $1, 2, ..., n$ thành $a_1, a_2, ..., a_n$ mà khi chia các số $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2a_3...a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau.

Phân tích. Theo đề, ta có thể suy ra được a_n phải là n vì nếu ngược lại giả sử tồn tại $n \neq n: \ a_i = n$ thì trong dãy $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2a_3...a_n$ sẽ có ít nhất 2 số chia hết cho n (trái với đề bài). Suy ra $a_1a_2a_3...a_{n-1} = (n-1)!$ và $a_1a_2a_3...a_n \vdots n$.
Từ suy luận đó cùng với n là hợp số, ta nghĩ đến một bổ đề: Nếu n là hợp số và $n > 4$ thì $(n-1)! \vdots n$.
Dựa vào bổ đề này ta có thể kết luận được $n = 4$ là kết quả cần tìm.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bổ đề sau: Nếu n là hợp số và $n > 4$ thì $(n-1)! \vdots n$.
Chứng minh: Vì n là hợp số lớn hơn 4 nên tồn tại a, b thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $1 < a < b < n$ và $n = a.b$. Suy ra $(n-1)! \vdots ab$ hay $(n-1)! \vdots n$.
Trước hết a_n phải là n vì nếu ngược lại giả sử tồn tại $n \neq n: \ a_i = n$ thì trong dãy $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2a_3...a_n$ sẽ có ít nhất 2 số chia hết cho n (trái với đề bài).
Suy ra $a_1a_2a_3...a_{n-1} = (n-1)!$ và $a_1a_2a_3...a_n \vdots n$.
Nếu $n > 4$ thì do n là hợp số nên $(n-1)! \vdots n$ hay $a_1a_2a_3...a_{n-1} \vdots n$ (loại).
Nếu $n = 4$ thì tồn tại một hoán vị của $1, 2, 3, 4$ là $1, 3, 2, 4$. Khi đó dãy số $1, 1.3, 1.3.2, 1.3.2.4$ sẽ có số dư $1, 3, 2, 0$ khi chia cho 4.
Vậy $n = 4$ là hợp số thỏa đề. ■

Bình luận. Bài tập này là một bài tập khó. Đầu tiên học sinh có khả năng quan sát cũng như nhận định tốt, ta có thể rút ra được nhận xét $a_n = n$. Không những vậy, bài tập này đòi hỏi học sinh phải có kiến thức rộng, biết được bổ đề mới có khả năng giải quyết được bài toán.

5 Đề thi tuyển sinh trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội (Vòng 2)

Bài 1

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = \sqrt{x + 3y} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy = 3 & (2). \end{cases}$

2) Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

Phân tích.