Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta có: $\begin{cases} a+b-c>0 \\ c+b-a>0 \\ c+a-b>0. \end{cases}$

Suy ra $(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0$ luôn đúng.

Vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức ban đầu. ■

4 Đề thi tuyển sinh trường KHTN - ĐHQG Hà Nội năm 2017-2018 (Không Chuyên)

Bài 1

Câu 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x+x^2y=2y^3 \end{cases}$

Câu 2) Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})(2-\sqrt{1-x^2})$.

Câu 1)

Phân tích. Trước hết ta biến đổi hệ phương trình đã cho thành $\begin{cases} x^2+y^2=1+xy \ (1) \\ x(1+xy)=2y^3 \ (2) \end{cases}$

Từ đó một ý tưởng tự nhiên là thay phương trình (1) vào (2), ta sẽ được phương trình mới là:

$$x(x^2+y^2)=2y^3 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+2y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+2y^2=0 \end{array}\right.$$

Dễ dàng nhận thấy phương trình $x^2+xy+2y^2=0$ vô nghiệm do:
$x^2+xy+2y^2=0 \Leftrightarrow (x-\frac{y}{2})^2+\frac{7y^2}{4}>0$ với $x, y \neq 0$
Từ đó thay $x=y$ vào phương trình (1) ta được phương trình $2x^2-x-1=0$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x^2+y^2=1+xy \ (1) \\ x(1+xy)=2y^3 \ (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được

$$x(x^2+y^2)=2y^3 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+2y^2)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+2y^2=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Thay $x = y$ vào (1) ta thu được tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1;1), (-1;-1)\}$.
■

Bình luận. Đây là một câu khá dễ trong đề thi, điểm mấu chốt của bài toán này là đưa được về phương trình $(x-y)(x^2+xy+2y^2)=0$

Bài tập tương tự.

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+2y^2+x^2y=2 \\ 2x-x^3y+3y^3=0 \end{cases}$.
2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2+1=3xy \\ 3x^2y=10y^3+x \end{cases}$.

Tiêu Khánh Văn-SV ĐHSP TPHCM

Câu 2) $2(x+1)\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})(2-\sqrt{1-x^2})$ (1)

Phân tích. Nhìn vào phương trình đề cho, nếu chúng ta đặt $a = \sqrt{x+1}$ và $b = \sqrt{1-x}$ thì ta sẽ có $a^2+b^2=2$.
Từ đó vế phải của phương trình sẽ trở thành

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \text{ (Thay } 2 = a^2+b^2)$$

Mặc khác VT= $2a^3$ nên phương trình trở thành $2a^3 = a^3+b^3 \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $-1 \le x \le 1$.
Đặt $a = \sqrt{x+1}$ và $b = \sqrt{1-x}$ thì ta sẽ có $a^2+b^2=2$.
Mặc khác VT= $2a^3$ nên phương trình trở thành $2a^3 = a^3+b^3 \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$.
Khi đó $\sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x+1 = 1-x \Leftrightarrow x = 0$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$. ■

Bình luận.

Việc đặt $a = \sqrt{x+1}$ và $b = \sqrt{1-x}$ giúp ta dễ biến đổi và phát hiện vế phải của phương trình là một hằng đẳng thức, đây cũng chính là điểm mấu chốt giúp ta giải phương trình này.
Việc đặt ẩn phụ giúp ta trình bày lời giải một cách rõ ràng, tránh những sai lầm không đáng có, đồng thời giúp ta dễ nhìn ra hướng giải quyết của bài toán. Tuy nhiên, việc nhìn ra cách đặt ẩn phụ như thế nào, đòi hỏi người làm toán phải có kĩ năng tốt trong việc quan sát và đánh giá.

Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình: $9(1-x)\sqrt{1-x} = (\sqrt{1+4x} + 2\sqrt{1-x})(5 - 2\sqrt{1+3x-4x^2})$.

2. Giải phương trình: $7(3+2x)\sqrt{3+2x} = (\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x})(6 + \sqrt{9-4x}$.

Tiêu Khánh Văn-SV ĐHSP TPHCM

Bài 2

Câu 1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$12x^2 + 26xy + 15y^2 = 4617$$

Câu 2) Với a, b là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = (a+b)\left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{a+b^3}\right) - \frac{1}{ab}$$

Câu 1)

Phân tích. Nhìn vào vế trái của đẳng thức, ta có thể dễ dàng thấy rằng

$$12x^2 + 26xy + 15y^2 = (2x-y)^2 + (2y)^2$$

Mặt khác $4617 = 19.243$ nên $(2x-y)^2 + (2y)^2 = 19.243$, suy ra $19|(2x-y)^2 + (2y)^2$ và $243|(2x-y)^2 + (2y)^2$. Mà 19 là số nguyên tố có dạng $4k+3$ nên ta nghĩ đến bổ đề: Nếu $p|a^2+b^2$ thì $p|a, b$ với $p = 4k+3$. Và khi phân tích tiếp, ta có thể thấy được điều mâu thuẫn.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bổ đề sau: Nếu $p|a^2+b^2$ thì $p|a, b$ với $p = 4k+3$.
Chứng minh phản chứng.
Giả sử $p|a$ và $p|b$ sai. Khi đó có 3 trường hợp:
TH1: $p|a$ và $p \nmid b$
Khi đó $p|a^2$ và $p \nmid b^2$, suy ra $p \nmid a^2 + b^2$ (mâu thuẫn).
TH2: $p \nmid a$ và $p|b$ (tương tự như TH1)
TH3: $p \nmid a$ và $p \nmid b$ Khi đó, theo định lý Fermat nhỏ:
$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ và $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
Suy ra $a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$.
Do đó $a^{4k+2} + b^{4k+2} \equiv 2 \pmod{p}$.
Hay $a^{2(2k+1)} + b^{2(2k+1)} \equiv 2 \pmod{p}$.
Suy ra $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{p}$ (mâu thuẫn).

Vậy bổ đề được chứng minh.

Vì $4617 = 19.243$ nên $19|12x^2 + 26xy + 15y^2 \Rightarrow 19|12x^2 - 12xy + 15y^2 + 38xy$

$\Rightarrow 19|3(4x^2 - 4xy + 5y^2) \Rightarrow 19|4x^2 - 4xy + y^2 + 4y^2 \Rightarrow 19|(2x - y)^2 + (2y)^2$.

Nhận thấy rằng 19 là số nguyên tố có dạng $4k + 3$, áp dụng bổ đề trên ta được $19|2x - y$ và $19|2y$ do đó $19|4x$ suy ra $19|x, y$ hay $19^2|12x^2 + 26xy + 15y^2$ (vô lí vì $19^2|4617$)

Vậy không tồn tại các số nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình. ■

Bình luận. Bài toán này đòi hỏi học sinh phải có kĩ năng quan sát tốt cũng như kiến thức rộng. Bài toán sẽ khá đơn giản nếu học sinh biết được bổ đề và ngược lại sẽ khó mà có được lời giải nếu chưa biết trước bổ đề đã nêu.

Bài tập tương tự.

1. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $29x^2 + 16xy + 5y^2 = 2666$.

2. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $13x^2 + 24xy + 13y^2 = 3397$.

Vương Phú Quý-SV ĐHSP TPHCM

Câu 2

Phân tích. Ở bài tập này, đề bài không cho bất cứ dữ liệu gì ngoài a, b là các số thực dương, vì vậy để đánh giá được GTLN của biểu thức, ta nghĩ tới việc đánh giá từng phần của biểu thức và rút gọn với nhau.

Đầu tiên, ta thấy nếu ta nhân $a^3 + b$ với $\frac{1}{a} + b$ và sử dụng bất đẳng thức BCS ta sẽ thấy xuất hiện được $(a + b)^2$, tượng tự với $b^3 + a$ ta cũng thấy xuất hiện $(a + b)^2$.

$(a^3 + b)\left(\frac{1}{a} + b\right) \geq (a + b)^2$; $(b^3 + a)\left(\frac{1}{b} + a\right) \geq (a + b)^2$.

Khi đó $\frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{b^3 + a} \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{(a + b)^2}$, khi có được điều này, ta có thể rút gọn với nhân tử $a + b$ ở phía ngoài, làm gọn được biểu thức. Tiếp tục làm gọn, ta sẽ có được kết quả.

Lời giải. Áp dụng BĐT BSC ta có:

$(a^3 + b)\left(\frac{1}{a} + b\right) \geq (a + b)^2$; $(b^3 + a)\left(\frac{1}{b} + a\right) \geq (a + b)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{b^3 + a} \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{(a + b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{VT} \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{a + b} - \frac{1}{ab} = 1 + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ab} = 1.$$