Bài 4

Cho đường tròn (O) với tâm O, bán kính R và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (O) sao cho M không trùng với các điểm A và B. Lấy điểm C đối xứng của O qua A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N. Đường thẳng BN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F.

a) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng và tứ giác $MENF$ nội tiếp.

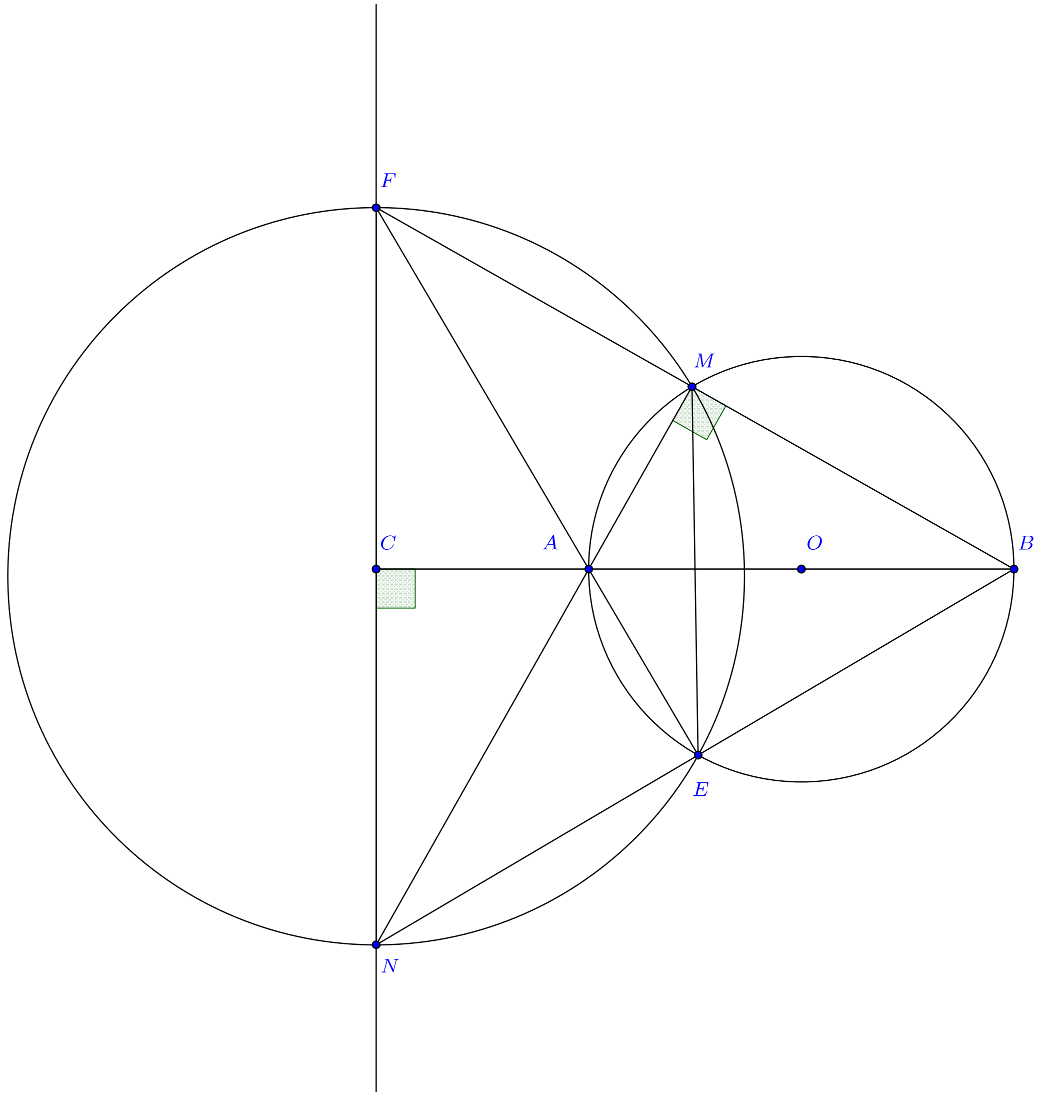
b) Chứng minh rằng $AM.AN = 2R^2$.

c) Xác định vị trí điểm M trên đường tròn (O) để tam giác BNF có diện tích nhỏ nhất.

Phân tích. a) Nhận thấy A là giao điểm của 2 đường vuông góc NM, BC đồng thời FE cũng là đường vuông góc nên ý tưởng ở đây sẽ là chứng minh A là trực tâm trong tam giác BNF. Sau khi đã có A, E, F thẳng hàng thì để chứng minh tứ giác nội tiếp ta sử dụng dấu hiệu 2 góc bằng nhau cùng nhìn một cạnh.

b) Cần chứng minh $AM.AN = 2R^2$ nên ý tưởng đầu tiên sẽ xuất hiện là việc chứng minh hai tam giác đồng dạng và hai tam giác đó có chứa AO, AB hay CA. Thứ hai ta nhận thấy $AM.AN = AE.AF$-một phần ở đây do hai tam giác chứa AE và AF của ta chứa cả AC và AB nên dẫn đến việc xét hai tam giác CAF và tam giác EAB.

c) Sau khi tính diện tích tam giác BFN ta nhận thấy cần tìm $\min CF + CN$, từ đây ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy và cũng tất nhiên ta cần chứng minh tích $CF.CN$ là một hằng số. Việc đạt giá trị nhỏ nhất cần xét trường hợp dấu bằng xảy ra $CF = CN$ dẫn đến tam giác BFN cân. Tiếp theo để xác định cụ thể điểm M ta nghĩ đến việc chứng minh ΔBFN đều để sử dụng các góc 60° có liên quan đến M.



Lời giải.

a) Ta xét tam giác BFN có BC, NM và FE lần lượt là đường cao kẻ từ đỉnh B, N và F, đồng thời $BC \cap NM = A$ nên A là trực tâm, suy ra $A \in FE$. Vậy A, E, F thẳng hàng.

Ta lại xét trong tứ giác $MENF$ có: $\widehat{NMF} = \widehat{NEF} = 90°$ và cùng nhìn cạnh NF, suy ra tứ giác $MENF$ nội tiếp.

b) Theo tính chất (*Toán 9-Tập 2, Bài 23/76*) ta có: $AM.AN = AE.AF$

Đồng thời lại có $\Delta CAF \sim \Delta EAB$ suy ra: $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AF}{AB} \Leftrightarrow AE.AF = AC.AB = AO.AB = 2R^2$ Vậy ta đã chứng minh được $AM.AN = 2R^2$.

c) Ta có: $\widehat{NBC} = \widehat{CFA}$ (do $\Delta CFA \sim \Delta EBA$ theo câu b) nên ta có $\Delta CFA \sim \Delta CBN \Rightarrow CF.CN = CA.CB = 3R^2$.

Mặt khác: $S_{\Delta BNF} = \dfrac{1}{2}BC.FN = \dfrac{1}{2}3R.FN = \dfrac{1}{2}3R.(CF + CN)$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $CF + CN \geq 2\sqrt{CF.CN} = 2\sqrt{3}R$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $CF = CN$-tức BC là đường trung tuyến, đồng thời BC cũng là đường cao nên ΔBFN cân tại B.

Ta lại có $BA = \dfrac{2}{3}BC$ nên A là trọng tâm tam giác BFN và theo câu a) thì A là cũng là trực tâm vì thế tam giác BFN đều. Suy ra $CBF = 30°$ hay $\widehat{ABM} = 30°$.
Vậy để $S_{\Delta BFN}$ nhỏ thì M thuộc đường tròn (O) sao cho $\widehat{ABM} = 30°$. ■

Bài 5

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} > 1.$$

Phân tích. Đề bài cho a, b, c là ba cạnh của tam giác nên ta sẽ lưu ý đến bđt sau: $a + b - c > 0$. Bắt đầu bài toán bằng việc chuyển hết sang một vế và quy đồng, do mẫu là số dương nên ta chỉ cần xét tử dương là thỏa yêu cầu bài toán:

i Ta nhận thấy có xuất hiện: $a^2+b^2, b^2+c^2, a^2+c^2$, khi đó ta nghĩ ngay đến việc làm xuất hiện các hằng đẳng thức bằng cách thêm bớt $2ab, 2bc, 2ac$ -cụ thể ta thêm bớt $2abc$.

ii) Sau khi thêm bớt để được các hằng đẳng thức, ta tiếp tục sử dụng hằng đẳng thức $A^2 - B^2$, sau đó để ý ta sẽ nhận thấy có nhân tử chung $a + b - c$.

iii) Sau khi đặt nhân tử chung, ta tiếp tục rút gọn để được $(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)$-gợi ý cho ta về việc sử dụng bất đẳng thức trong tam giác.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} > 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{c(a^2+b^2-c^2)+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-2abc}{2abc} > 0$$
$$\Leftrightarrow c(a^2+b^2-c^2)+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-2abc > 0$$
$$\Leftrightarrow c(a^2+b^2-c^2+2ab)+a(b^2+c^2-a^2-2bc)+b(a^2+c^2-b^2-2ac) > 0$$
$$\Leftrightarrow c[(a+b)^2-c^2]+a[(b-c)^2-a^2]+b[(a-c)^2-b^2] > 0$$
$$\Leftrightarrow c(a+b-c)(a+b+c)+a(b-c-a)(b-c+a)+b(a-c-b)(a-c+b) > 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)[c(a+b+c)+a(b-c-a)+b(a-c-b)] > 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)(c^2-a^2+2ab-b^2) > 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)[c^2-(a-b)^2] > 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)(c-a+b)(c+a-b) > 0$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta có: $\begin{cases} a+b-c>0 \\ c+b-a>0 \\ c+a-b>0. \end{cases}$

Suy ra $(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0$ luôn đúng.

Vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức ban đầu. ■

4 Đề thi tuyển sinh trường KHTN - ĐHQG Hà Nội năm 2017-2018 (Không Chuyên)

Bài 1

Câu 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x+x^2y=2y^3 \end{cases}$

Câu 2) Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})(2-\sqrt{1-x^2})$.

Câu 1)

Phân tích. Trước hết ta biến đổi hệ phương trình đã cho thành $\begin{cases} x^2+y^2=1+xy\ (1) \\ x(1+xy)=2y^3\ (2) \end{cases}$

Từ đó một ý tưởng tự nhiên là thay phương trình (1) vào (2), ta sẽ được phương trình mới là:

$$x(x^2+y^2)=2y^3 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+2y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+2y^2=0 \end{array}\right.$$

Dễ dàng nhận thấy phương trình $x^2+xy+2y^2=0$ vô nghiệm do:
$x^2+xy+2y^2=0 \Leftrightarrow (x-\dfrac{y}{2})^2+\dfrac{7y^2}{4}>0$ với $x, y \neq 0$
Từ đó thay $x=y$ vào phương trình (1) ta được phương trình $2x^2-x-1=0$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x^2+y^2=1+xy\ (1) \\ x(1+xy)=2y^3\ (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được

$$x(x^2+y^2)=2y^3 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+2y^2)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+2y^2=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$