Thay vào $x_1x_2 = m^2$ ta được phương trình theo biến m

$$(m-2)(m+4) = m^2 \Leftrightarrow 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy với $m = 4$, đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa yêu cầu đề cho.

2. Do $ac = -2 < 0$ nên phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m.

   Khi đó, theo hệ thức Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 = -\dfrac{2}{x_2}. \end{cases}$$

   Ta có

$$A = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 4\right) = (x_1x_2)^2 - 4x_1^2 - x_2^2 + 4 = 8 - \frac{8}{x_2^2} - x_2^2 \le 8 - 2\sqrt{\frac{8}{x_2^2} \cdot x_2^2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

   Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{8}{x_2^2} = x_2^2 \Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt[4]{8} \Rightarrow x_1 = \mp\frac{2}{\sqrt[4]{8}}.$$

   Vậy $m = \sqrt[4]{8} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{8}}; -\sqrt[4]{8} + \dfrac{2}{\sqrt[4]{8}}$.

■

Bình luận. 1. Theo cảm nhận riêng tôi, bài toán này thật sự không quá khó, tuy nhiên không quá đơn giản! Sự đánh đố được thể hiện rõ ở việc học sinh có phát hiện ra $(x_1 - m)^2 = 2x_1$ hay không. Thêm nữa đó là việc tìm ra x_1, x_2 theo tham số m thông qua giải hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 + x_2 = 2(m+1). \end{cases}$$

2. Bài toán này khá đơn giản, chỉ cần tinh ý đưa A về một ẩn và dùng bất đẳng thức Cauchy là được. Có khó chăng là do học sinh chưa quen với việc giải bất đẳng thức.

Bài tập tương tự.

Bài 3

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + p + 6$ là một số chính phương.

Phân tích. Với bài toán này, do p^2+p+6 là số chính phương nên ta cứ đặt chúng bằng một số chính phương k^2. Lại để ý là hệ số p^2, p như nhau, nên ta có thể nhân hai vế cho 4 để đưa về dạng bình phương, từ đó có những đánh giá tiếp theo.

Ngoài cách trên, ta có thể kẹp p^2+p+6 giữa hai số chính phương, để hạn chế trường hợp và giải. Bởi đây là một tam thức bậc hai nên việc giải chúng là khả thi.

Lời giải. **Cách 1.** p^2+p+6 là số chính phương khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$p^2+p+6 = k^2 \Leftrightarrow 4p^2+4p+24 = 4k^2 \Leftrightarrow (2p+1)^2-4k^2 = 23 \Leftrightarrow (2p+2k+1)(2p-2k+1) = 23.$$

Nhận xét $2p+2k+1 > 2p-2k+1$ và $2p+2k+1 > 0$ nên

$$\begin{cases} 2p+2k+1 = 23 \\ 2p-2k+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5 \\ k = 6 \end{cases}.$$

Kiểm tra lại với $p = 5$ thì $p^2+p+6 = 36 = 6^2$ là một số chính phương.

Cách 2. Ta có nhận xét

$$p^2 < p^2+p+6 < p^2+6p+9 = (p+3)^2.$$

Do đó chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau

$$\left[\begin{array}{l} p^2+p+6 = (p+1)^2 \\ p^2+p+6 = (p+2)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 5, \text{ (là số nguyên tố)} \\ p = -\dfrac{2}{3}, \text{ (vô lý)}. \end{array}\right.$$

Kiểm tra lại với $p = 5$ thì $p^2+p+6 = 36 = 6^2$ là một số chính phương. ■

Bình luận. Đây là bài toán thuộc lĩnh vực số học và thương xuyên xuất hiện trong đề thi tuyển sinh vào khối lớp chuyên Toán của trường. Đi cùng với nó là giải các phương trình nghiệm nguyên, hay tìm số để thỏa mãn điều kiện nào đó. Tuy nhiên, mức độ những bài toán này không quá phức tạp.

Bài tập tương tự.

Bài 4

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A, B, $(R < R')$. Kẻ tiếp tuyến chung CD của (O) và (O'), (C, D là tiếp điểm của C thuộc (O), D thuộc (O')). Qua B kẻ cát tuyến song song với CD cắt (O) tại E, cắt (O') tại F. Gọi G, H theo thứ tự là giao điểm của DA, CA với EF. Gọi I là giao điểm của EC với FD.

a) Chứng minh $\Delta BCD = \Delta ICD$.

b) Gọi K là giao điểm của AB và CD. Chứng minh K là trung điểm của CD.

c) Chứng minh BI là trung trực của đoạn thẳng GH.

Phân tích. a) Với câu a), ta nhận thấy CD là cạnh chung của hai tam giác ΔBCD và ΔICD, ngoài ra không còn cặp cạnh nào bằng nhau nữa. Do vậy, ta nghĩ đến việc tìm các cặp góc tương ứng bằng nhau. Dựa vào giả thiết CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn và $CD \parallel EF$, việc tìm ra các cặp góc đó khá đơn giản.

b) Với bài toán này, bạn nào nắm vững về phương tích thì việc tìm ra lời giải khá đơn giản! Thật vậy, xét phương tích của điểm K đối với đường tròn (O) và (O') ta có

$$\mathscr{P}_{K/(O)} = KC^2 = KA \cdot KB = KD^2 = \mathscr{P}_{K/(O')}.$$

Suy ra $KC = KD$ tức K là trung điểm của CD.

Từ ý tưởng đó, ta sẽ chứng minh ý này dựa vào các tỷ số đồng dạng.

c) Để chứng minh BI là trung trực của GH ta cần chứng minh BI vuông góc với GH tại trung điểm B của GH. Nghĩa là cần chứng minh hai điều: Một là B là trung điểm của GH, hai là $BI \perp GH$. Ý nhất được gợi ý từ câu b). Ý thứ hai, ta sẽ chứng minh thông qua CD, bởi $CD \perp GH$.

Lời giải. 1. Chứng minh $\Delta BCD = \Delta ICD$.

Do $CD \parallel GH$ nên $\widehat{ICD} = \widehat{CEB}$ và $\widehat{IDC} = \widehat{DFB}$.

Ta lại có $\widehat{CEB} = \widehat{DCB}$, (cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$) và $\widehat{DFB} = \widehat{CDB}$, (cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$).

Từ đó suy ra $\widehat{ICD} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{IDC} = \widehat{CDB}$.

Do hai tam giác BCD và tam giác ICD có cạnh CD chung; $\widehat{ICD} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{IDC} = \widehat{CDB}$ nên $\Delta BCD = \Delta ICD$, (g-c-g).

2. Chứng minh K là trung điểm của CD.

   Xét hai tam giác KCA và tam giác KBC có

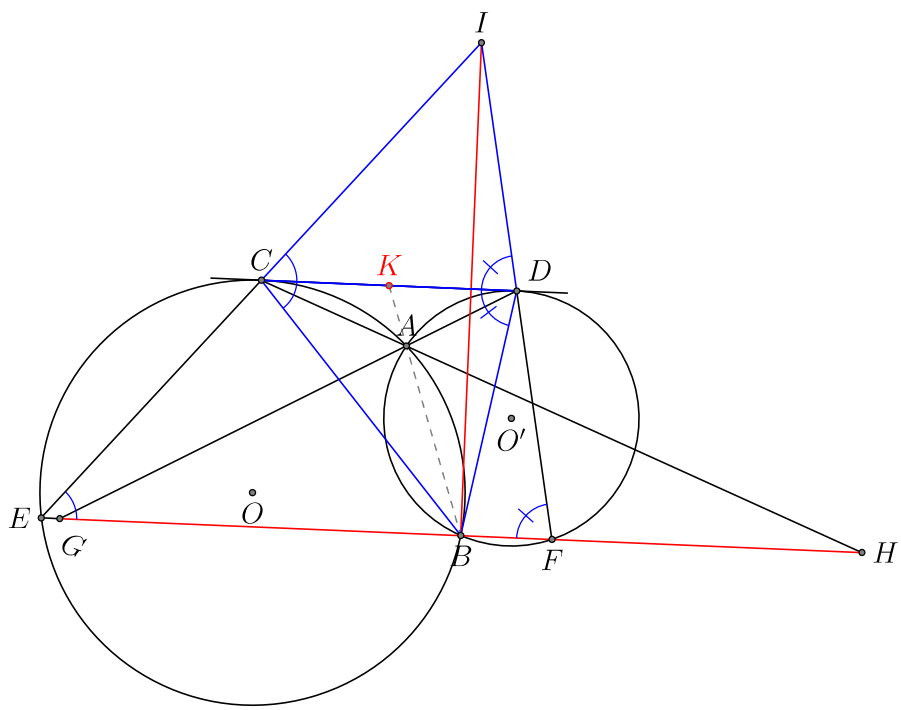
$$\widehat{CKA} \text{ chung;}$$
$$\widehat{KCA} = \widehat{KBC}, \text{ (cùng chắn } \overset{\frown}{AC}\text{).}$$

   Suy ra $\Delta KCA \backsim \Delta KBC$, (g-g).

   Suy ra $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{KA}{KC} \Rightarrow KC^2 = KA.KB$.

   Tương tự ta cũng có $KD^2 = KA.KB$. Do đó $KC = KD$.

   Vậy K là trung điểm của CD.



3. Do $CD \perp GH$ nên ta có các đẳng thức sau

$$\frac{KC}{BH} = \frac{KA}{KB} = \frac{KD}{BG}.$$

   Từ K là trung điểm của CD suy ra

$$B \text{ là trung điểm của } GH. \tag{1}$$

   Mặt khác $CD = CB$ và $DI = DB$, (do $\Delta BCD = \Delta ICD$) nên CD là trung trực của BI, tức là $BI \perp CD$. Mà $CD \parallel GH$ nên

$$BI \perp GH. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra BI là đường trung trực của GH.

■

Bình luận.

Bài tập tương tự.