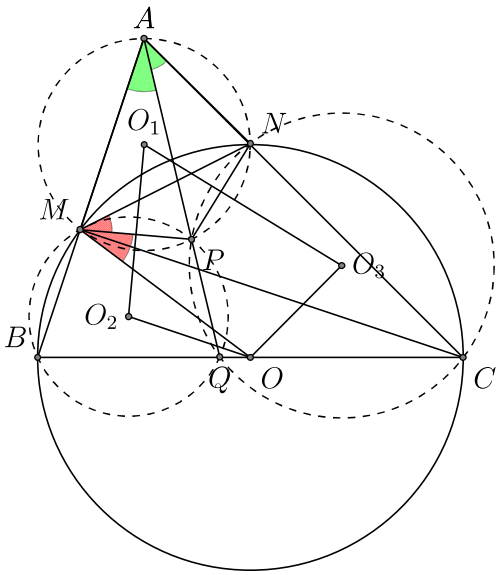
b) Ta có $\widehat{BQP} = \widehat{AMP}$, vì $BMPQ$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa $\widehat{CQP} = \widehat{ANP}$, vì $CNPQ$ là tứ giác nội tiếp. Mà $\widehat{AMP}+\widehat{ANP} = 180°$. Do đó $\widehat{BQP}+\widehat{CQP} = 180°$, mà hai góc nằm ở vị trí góc kề. Vậy B, Q, C thẳng hàng.

c) Ta có $OO_2 \perp AB$ vì đường tròn (O) và (O_2) cắt nhau tại BM. Tương tự $OO_3 \perp AC$. Suy ra $\widehat{O_2OO_3} = 180° - \widehat{BAC}$.

Tương tự ta có $O_1O_3 \perp PN$ và $O_1O_2 \perp PM$. Suy ra $\widehat{O_2O_1O_3} = 180° - \widehat{MPN}$.

Ta có $\widehat{O_2OO_3} + \widehat{O_2O_1O_3} = 360° - \left(\widehat{BAC} + \widehat{MPN}\right) = 180°$.

Vậy $O_1O_2OO_4$ là tứ giác nội tiếp. Vậy bốn điểm O, O_1, O_2, O_3 cùng thuộc một đường tròn.



■

12 Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Tiền Giang

Bài 1

1. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} - 2}$.

2. Giải phương trình $x^2 - \sqrt{x^3+x} = 6x - 1$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \\ x - 3y + xy = 0. \end{cases}$

Phân tích. 1. Tiếp cận bài toán này, ta để ý $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$ nên có thể khai căn được, và tử số sau khi rút gọn là 1. Với mẫu số, không khó để đoán trong căn bậc ba chính là lập phương của một biểu thức, cụ thể hơn chính là liên hợp của $\sqrt{5}+2$. Từ nhận xét đó, bài toán trở nên đơn giản vô cùng!

2. Tiếp cận bài toán, ta chú ý để biểu thức trong căn, bởi đây là căn bậc hai, nhưng trong căn lại là một đa thức bậc ba. Để ý $\sqrt{x^3+x} = \sqrt{x(x^2+1)}$ và nếu chuyển vế 1 từ vế phải qua vế trái phương trình thì ta lại có một lượng x^2+1. Từ đây, ta nghĩ đến việc đặt $t = \sqrt{x^2+1}$, sẽ đưa phương trình ban đầu về dạng phương trình đẳng

cấp

$$t^2 - \sqrt{x}t - 6x = 0.$$

3. Tiếp cận phương trình ta thấy rằng $x^2 + 9y^2$ là một phần của $(x - 3y)^2$. Hay nói cách khác, ta có thêm bớt để đưa $x^2 + 9y^2$ về $(x - 3y)^2$. Thật vậy, biến đổi phương trình thứ nhất

$$x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \Leftrightarrow (x - 3y)^2 + 14xy + 24 = 0.$$

Đến đây, chắc các bạn sẽ nhận ra việc cần làm tiếp theo, đó là thay $xy = -(x - 3y)$ vào phương trình trên ta sẽ thu được phương trình bậc hai theo ẩn $(x - 3y)$. Việc còn lại là giải chúng thôi!

Lời giải. 1. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} - 2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)^3} - 2} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right) - 2} = \frac{1}{-1} = -1. \end{aligned}$$

2. Với $x \geq 0$, đặt $t = \sqrt{x^2+1} \geq 0$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$t^2 - \sqrt{x} \cdot t - 6x = 0.$$

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình trên cho $x \neq 0$ ta được

$$\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{t}{\sqrt{x}} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{\sqrt{x}} = 3, \text{ (thỏa } t, x \geq 0) \vee \frac{t}{\sqrt{x}} = -2, \text{ (không thỏa } t, x \geq 0).$$

Khi đó

$$\frac{t}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 9x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9+\sqrt{77}}{2} \\ x = \dfrac{9-\sqrt{77}}{2}. \end{array}\right.$$

Kiểm tra lại ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{9+\sqrt{77}}{2}; \dfrac{9-\sqrt{77}}{2}$.

3. $$\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \\ x - 3y + xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3y)^2 + 14xy + 24 = 0 \\ xy = -(x-3y). \end{cases}$$

Thay phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$(x-3y)^2 - 14(x-3y) + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3y=2 \\ x-3y=12. \end{array}\right.$$

Với $x-3y=2$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x-3y=2 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ x\cdot(-3y)=6. \end{cases}$$

Theo hệ thức Viète $x, -3y$ là nghiệm của phương trình $z^2-2z+6=0$, (vô nghiệm).

Với $x-3y=12$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x-3y=12 \\ xy=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=12 \\ x\cdot(-3y)=36. \end{cases}$$

Theo hệ thức Viète $x, -3y$ là nghiệm của phương trình $z^2-12z+36=0 \Leftrightarrow z=6$. Khi đó

- Nếu $x=6$ thì $y=-2$.
- Nếu $y=6$ thì $x=-2$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x;y)=(6;-2),(-2;6)$.

■

Bình luận. Theo cảm nhận riêng tôi, đây là một câu ghi điểm trong đề thi này, bởi nó không đánh đố học sinh nhiều.

1. Việc đoán $\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3} = \sqrt{5}-2$ không hề khó đối với đối tượng là các bạn thí sinh thi vào khối lớp chuyên toán. Và với suy đoán này thì bài toán này không còn gì để bàn luận thêm.

2. Phương trình này khá hay và cũng không hẳn là đơn giản. Với cách đặt $\sqrt{x^2+1}=t$ không phải tất cả cũng đều nghĩ ra. Tuy nhiên, với một số bạn khác có thể chuyển phương trình về dạng
$$\sqrt{x^3+x} = x^2-6x+1,$$
và bình phương hai vế để đưa về phương trình bậc bốn với hệ số bậc cao nhất là 1. Đến đây, việc giải phương trình bậc bốn này không quá khó, nếu các bạn biết

rằng nó luôn tách được thành tích của hai tam thức bậc hai, nghĩa là sau khi bình phương và rút gọn, ta hoàn toàn đưa phương trình ấy về dạng

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$$

bằng phương pháp hệ số bất định. Tuy vậy, phương pháp này khá vất vả và không phải là cách giải quyết hay!

Bài tập tương tự.

1. a) Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + 1}{\left(2\sqrt{2} + 1\right) \cdot \sqrt[3]{-25 + 22\sqrt{2}} + \sqrt{3} - 7}$.

   b) Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{-55 + 63\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{7} - 1\right) \cdot \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - 5}$.

   Phạm Hữu Hiệp - SV khoa Toán, ĐHSP TP.HCM

2. Giải phương trình $x^4 - \sqrt{x^6 + x^2} = 6x^2 - 1$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 49x^2 + 25y^2 - 2xy = 35 \\ 7x - 5y + 2xy = 0. \end{cases}$

   Phạm Hữu Hiệp - SV khoa Toán, ĐHSP TP. HCM

Bài 2

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2(m+1)x - m^2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $(x_1 - m)^2 + x_2 = 3m$.

2. Cho phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$, m là tham số. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho biểu thức $A = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 4)$ đạt giá trị lớn nhất.

Phân tích. 1. Tiếp cận bài toán này, để tìm các giá trị m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt ta sẽ lập phương trình hoành độ giao điểm. Tuy nhiên, đây chỉ là một bước "bé nhỏ" trong việc giải quyết bài toán này. Ý đồ của người ra đề có lẽ là ở ý sau "hai nghiệm thỏa mãn

$$(x_1 - m)^2 + x_2 = 3m."$$

Sau khi lập phương trình hoành độ giao điểm và biến đổi ta thấy

$$x^2 = 2(m+1)x - m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 = 2x \Leftrightarrow (x-m)^2 = 2x.$$

Rõ ràng x_1 là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm nên phải có

$$2x_1 = (x_1 - m)^2.$$

Từ đó, ta có

$$2x_1 + x_2 = 3m.$$

Đến đây, kết hợp với hệ thức Viète ta hoàn toàn tìm ra m thỏa yêu cầu bài toán.

2. Nhìn ngay phương trình ta đã biết phương trình này có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Do vậy ta sẽ không đi phân tích ý này mà tập trung vào ý hai.

   Với bài toán này, việc học sinh có gắng biến đổi A về thành tổng tích để dùng hệ thức Viète là vô vọng, bởi biểu thức này không đối xứng. Do tích x_1x_2 là một số cụ thể, nên cách giải quyết tốt nhất đó là thay vào và đánh giá A.

Lời giải. 1. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d là

$$x^2 = 2(m+1)x - m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0.$$

Dường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = [-(m+1)]^2 + m^2 > 0 = (m+1)^2 + m^2 > 0, \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Khi đó theo hệ thức Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = m^2. \end{cases}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} (x_1 - m)^2 + x_2 = 3m &\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1m + m^2 + x_2 = 3m \\ &\Leftrightarrow x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m^2 + 2x_1 + x_2 = 3m \\ &\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 3m. \end{aligned}$$

Kết hợp với $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ ta được $\begin{cases} x_1 = m - 2 \\ x_2 = m + 4. \end{cases}$