11 Đề thi THPT chuyên Lương Thế Vinh sở GD&ĐT Đồng Nai

Bài 1

Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{a+\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}+1} + \dfrac{1}{a+1}\right) : \dfrac{\sqrt{a}-1}{a+1}$, với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các số tự nhiên $a \neq 1$ sao cho biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Phân tích. a) Để ý phân tích nhân tử của mẫu $a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}+1 = (a+1)(\sqrt{a}+1)$. Từ đó qui đồng mẫu thức sẽ ngắn ngọn và dễ dàng hơn.

b) Sau khi rút gọn thì $P = \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$. Từ đó, để P nhận giá trị nguyên thì phân số $\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$ phải nhận giá trị nguyên, khi đó $\sqrt{a}-1$ phải là ước số của 2.

Lời giải. **a)** Với điều kiện $a \geq 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a+\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}+1} + \frac{1}{a+1}\right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(a+1)(\sqrt{a}+1)} + \frac{1}{a+1}\right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}}{a+1} + \frac{1}{a+1}\right) . \frac{a+1}{\sqrt{a}-1} \\ &= \frac{\sqrt{a}+1}{a+1} . \frac{a+1}{\sqrt{a}-1} \\ &= \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \end{aligned}$$

b) Ta có $P = \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$.

Từ đó $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{a}-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{a}-1|2 \Leftrightarrow \sqrt{a}-1 \in \{\pm 1, \pm 2\} \Leftrightarrow a \in \{0; 4; 9\}$. ■

Bài 2

a) Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4xy + x + 4y = 2 \\ x^2 - y^2 = -3. \end{cases}$

Phân tích. a) Phương trình này nếu ta nhân đa thức vào ta sẽ thu được phương trình bậc 4. Tuy nhiên, đây là dạng của phương trình qui về bậc 2 dạng

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e, \text{ với } a+d = b+c.$$

b) Hệ phương trình có phương trình thứ nhất nhiều hệ số liên kết và phương trình thứ hai khá đơn giản. Phân tích nhân tử phương trình thứ nhất ta thu được $(x-1)(x-4y+2) = 0$.

Lời giải. **a)**

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = 24. \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2+5x+4$. Khi đó phương trình trở thành

$$t(t+2) = 24 \Leftrightarrow t^2+2t-24 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = -6.$$

Khi $t = 4$. Thay vào ta được $x^2+5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5$.
Khi $t = -6$. Thay vào ta được $x^2+5x+10 = 0$, phương trình vô nghiệm.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -5\}$.

b) Từ phương trình thứ nhất ta có

$$x^2-4xy+x+4y = 2 \Leftrightarrow x^2+x-2-4y(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2-4y) = 0$$

TH1. $x = 1$. Thay vào pt thứ hai ta có $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$.

TH2. $x = 4y-2$. Thay vào pt thứ hai ta có $15y^2-16y+7 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1; \pm 2)$. ■

Bài 3

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-x-5 = 0$. Lập một phương trình bậc hai nhận $2x_1+x_2$ và x_1+2x_2 làm nghiệm.

Phân tích. Để lập phương trình bậc hai có nghiệm cho trước thì chúng ta cần sử dụng định lý Vi-ét đảo. Nghĩa là tìm tổng và tích của hai nghiệm cho trước.

Lời giải. Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình bậc hai $x^2-x-5 = 0$ ta có: $\begin{cases} x_1+x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = -5. \end{cases}$ Từ đó ta có: $\begin{cases} (2x_1+x_2)+(x_1+2x_2) = 3(x_1+x_2) = 3 \\ (2x_1+x_2)(x_1+2x_2) = 2(x_1^2+x_2^2)+5x_1.x_2 = 2(x_1+x_2)^2+x_1x_2 = - \end{cases}$
Vậy theo định lý Vi-ét đảo thì phương trình $X^2-3X-3 = 0$ nhận $2x_1+x_2$ và x_1+2x_2 làm nghiệm. ■

Bài 4

a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 8y + 7 = 0$.

b) Cho ba số thực không âm a, b, c. Chứng minh:

$$ab(b^2 + bc + ac) + bc(c^2 + ca + ab) + ac(a^2 + ab + bc) \leq (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)$$

Phân tích. a) Phương trình nghiệm nguyên được cho có dạng bậc 2 theo từng biến. Dựa vào điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ta thu được miền giá trị của biến còn lại.

b) Dễ thấy bậc của các đa thức bằng nhau và bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Biến đổi tương đương BĐT cần chứng minh ta thu được bất đẳng thức đơn giản hơn. Từ đó sử dụng các BĐT AM-GM để thu được điều cần chứng minh.

Lời giải. **a) Cách 1.** Xem phương trình là bậc hai theo biến x với tham số là y.

$$x^2 - 2x(y + 2) + 2y^2 + 8y + 7 = 0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2 - (2y^2 + 8y + 7) \leq \Leftrightarrow -y^2 - 4y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-3; -1]$.

TH1. $y = -3$. Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

TH2. $y = -2$. Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

TH3. $y = -1$. Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có $(-3; -1), (-2; \pm 1), (-1; 1)$.

Cách 2. Xem là phương trình bậc hai theo biến y. *(học sinh tự làm tương tự)*.

Cách 3. Phân tích thành tổng bình phương.

$$(x - y - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

Từ đây ta có $(y + 2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq -1$.

b) Biến đổi tương đương BĐT cần chứng minh ra có:

$$
\begin{aligned}
& ab(b^2+bc+ac)+bc(c^2+ca+ab)+ac(a^2+ab+bc) \le (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) \\
\Leftrightarrow\ & ab^3+bc^3+ca^3+2abc(a+b+c) \le ab^3+bc^3+ca^3+ab(a^2+c^2)+bc(a^2+b^2)+ca(b^2+c^2) \\
\Leftrightarrow\ & 2abc(a+b+c) \le ab(a^2+c^2)+bc(a^2+b^2)+ca(b^2+c^2)
\end{aligned}
$$

Theo BĐT AM-GM thì $ab(a^2+c^2)+bc(a^2+b^2)+ca(b^2+c^2) \ge ab.2ac+bc.2ab+ca.2bc = 2abc(a+b+c)$. Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Bài 5

Trong mặt phẳng tọa độ cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có các đỉnh A, B, C, D, E đều là điểm nguyên (*điểm được gọi là điểm nguyên nếu như có hoành độ và tung độ đều nguyên*). Chứng minh rằng có ít nhất một điểm nguyên M nằm bên trong hoặc thuộc cạnh của ngũ giác đã cho, với M khác các đỉnh của ngũ giác đã cho.

Phân tích. Bài toán cho năm điểm của ngũ giác lồi có tọa độ nguyên bất kỳ. Bài toán cần chứng minh có ít nhất một điểm nguyên thỏa mãn điều kiện cho trước. Với yêu câu bài toán này, kiến thức thường sử dụng nhất là nguyên lý Dirichlet.

Lời giải. Trong năm điểm A, B, C, D, E theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất ba điểm có hoành độ cùng tính chất chẵn, lẻ. Xét các trường hợp sau:

TH1. Giả sử tồn tại ba điểm có hoành độ cùng là số chẵn. Khi đó trong ba điểm này có ít nhất hai điểm có tung độ cùng tính chẵn, lẻ. Khi đó trung điểm của hai điểm này có tọa độ nguyên. Do $ABCDE$ là ngũ giác lồi, do đó trung điểm của hai đỉnh bất kỳ luôn nằm trong hoặc thuộc cạnh, không trùng với đỉnh.

TH2. Giả sử tồn tại ba điểm có hoành độ cùng là số lẻ. Khi đó trong ba điểm này có ít nhất hai điểm có tung độ cùng tính chẵn, lẻ. Khi đó trung điểm của hai điểm này có tọa độ nguyên. Do $ABCDE$ là ngũ giác lồi, do đó trung điểm của hai đỉnh bất kỳ luôn nằm trong hoặc thuộc cạnh, không trùng với đỉnh.

■

Bài 6

Cho tam giác ABC có ba góc $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ đều là góc nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại hai điểm M, N; với M khác B, N khác C. Hai tia phân giác của hai góc $\widehat{CAB}, \widehat{OMN}$ cắt nhau tại điểm P.

a) Chứng minh $\widehat{OMN} = \widehat{CAB}$. Chứng minh tứ giác $AMPN$ nội tiếp đường tròn.

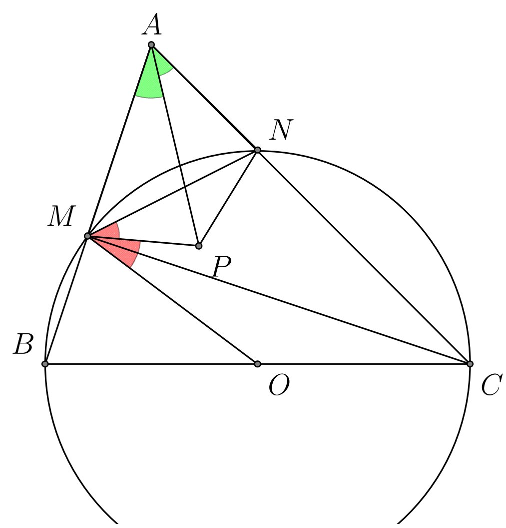
b) Gọi Q là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BMP và CNP, với Q khác P. Chứng minh ba điểm B, Q, C thẳng hàng.

c) Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác AMN, BMP, CNP. Chứng minh bốn điểm O, O_1, O_2, O_3 cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

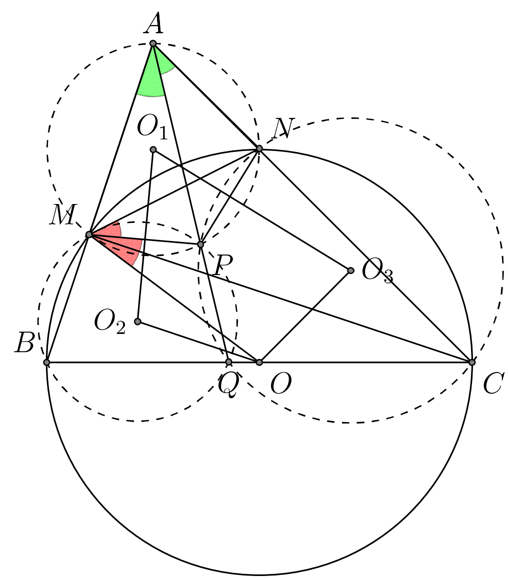
a) Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{CAB} &= \frac{1}{2}\left(90^\circ - \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{MN}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BM} + \text{sđ}\overset{\frown}{NC}\right)\\ &= \widehat{BCM} + \widehat{NMC}\\ &= \widehat{CMO} + \widehat{NMC}\\ &= \widehat{NMO}\end{aligned}$$



Cách 2. Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{BCA}$ vì $BCNM$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa $\widehat{BMO} = \widehat{ABC}$. Vậy $\widehat{OMN} = \widehat{CAB}$. Suy ra $\widehat{NAP} = \widehat{NMP}$. Vậy $AMPN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{BQP} = \widehat{AMP}$, vì $BMPQ$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa $\widehat{CQP} = \widehat{ANP}$, vì $CNPQ$ là tứ giác nội tiếp. Mà $\widehat{AMP} + \widehat{ANP} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{BQP} + \widehat{CQP} = 180^\circ$, mà hai góc nằm ở vị trí góc kề. Vậy B, Q, C thẳng hàng.



c) Ta có $OO_2 \perp AB$ vì đường tròn (O) và (O_2) cắt nhau tại BM. Tương tự $OO_3 \perp AC$. Suy ra $\widehat{O_2OO_3} = 180^\circ - \widehat{BAC}$.

Tương tự ta có $O_1O_3 \perp PN$ và $O_1O_2 \perp PM$. Suy ra $\widehat{O_2O_1O_3} = 180^\circ - \widehat{MPN}$.

Ta có $\widehat{O_2OO_3} + \widehat{O_2O_1O_3} = 360^\circ - \left(\widehat{BAC} + \widehat{MPN}\right) = 180^\circ$.

Vậy $O_1O_2OO_4$ là tứ giác nội tiếp. Vậy bốn điểm O, O_1, O_2, O_3 cùng thuộc một đường tròn.

■

12 Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Tiền Giang

Bài 1

1. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} - 2}$.

2. Giải phương trình $x^2 - \sqrt{x^3+x} = 6x - 1$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \\ x - 3y + xy = 0. \end{cases}$

Phân tích. 1. Tiếp cận bài toán này, ta để ý $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$ nên có thể khai căn được, và tử số sau khi rút gọn là 1. Với mẫu số, không khó để đoán trong căn bậc ba chính là lập phương của một biểu thức, cụ thể hơn chính là liên hợp của $\sqrt{5}+2$. Từ nhận xét đó, bài toán trở nên đơn giản vô cùng!

2. Tiếp cận bài toán, ta chú ý để biểu thức trong căn, bởi đây là căn bậc hai, nhưng trong căn lại là một đa thức bậc ba. Để ý $\sqrt{x^3+x} = \sqrt{x(x^2+1)}$ và nếu chuyển vế 1 từ vế phải qua vế trái phương trình thì ta lại có một lượng x^2+1. Từ đây, ta nghĩ đến việc đặt $t = \sqrt{x^2+1}$, sẽ đưa phương trình ban đầu về dạng phương trình đẳng