Bài tập tương tự.

1. Cho đường tròn (O), bán kính R, dây BC cố định khác đường kính. A là một điểm di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Các đường cao BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H.

   a) Chứng minh tứ giác $BECF$ nội tiếp và $AO \perp EF$.

   b) Tia EF cắt (O) tại I, tia AO cắt (O) tại G. Gọi M là trung điểm BC, D là giao điểm hai đường thẳng AH và BC. Chứng minh $AI^2 = 2AD.OM$.

   c) Trong trường hợp ΔABC cân tại A, gọi x là khoảng cách từ O đến BC. Tìm x để chu vi ΔABC lớn nhất.

   Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, tỉnh Ninh Bình năm 2016- 2017

10 Đề thi chuyên sở GD&ĐT Hưng Yên

Bài 1

Cho biểu thức $P = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị x để $P = \dfrac{3}{4}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P$.

Phân tích. Đối với bài tập này, học sinh chỉ cần quy đồng và rút gọn tử và mẫu là có thể hoàn tất yêu cầu ý **a)**. Đối với ý **b)** thực chất là sự lồng ghép để giải phương trình bậc 2. Ý **c)** hướng tới giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc 2. Học sinh chỉ cần phân tích tổng bình phương là có được kết quả.

Lời giải. Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$.

a) $P = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(2\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)-(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$.

b) Giải phương trình:

$$P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3x - 8\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(3\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$$

c) Biểu thức $A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P = 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) = 2(\sqrt{x}-2)^2 - 8 \geq -8$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -8, khi chỉ khi $x = 4$.

■

Bình luận. Dạng trục căn thức để rút gọn biểu thức là một dạng khá phổ biến trong kỳ thi vào lớp 10. Ngoài ra, bài này còn kết hợp kiểm tra kiến thức về tam thức và phương trình bậc hai.

Bài tập tương tự. Cho biểu thức $P = \dfrac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị x để $P = 1$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (\sqrt{x}-1)P$.

Đáp số. a) $P = 4\sqrt{x}$. **b)** $x = \dfrac{1}{16}$. **c)** $\min A = -1$.

Bài 2

Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 3x + m - 2$. Tìm tham số m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Phân tích. Dạng bài tập này học sinh cần qui về phương trình hoành độ giao điểm để từ đó tính chất nghiệm cũng chính là tính chất hoành độ giao điểm. Sử dụng điều kiện tổng tích các nghiệm để tìm ra điều điện để có hai nghiệm phân biệt dương.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2 = 3x+m-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2-m = 0 \quad (1)$.

Yêu cầu bài toán tương đương (1) có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Mà ta có $\Delta = 9 - 4(2-m) = 1 + 4m$ và $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 - m \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} < m < 2$. ■

Bài tập tương tự. Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 3x + m - 2$. Tìm tham số m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có tung độ dương.

Bài 3

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy = 2y - x \\ x^2 + 2x = 9 - y \end{cases}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}} = \dfrac{3x + x^2}{x^2 + 1}$.

Phân tích. **a)** Để ý thấy phương trình thứ nhất của hệ có hệ số tương tự nhau, từ đó nảy sinh vấn đề phân tích nhân tử. Ta thu được $(x+1)(x-2y) = 0$. Từ đó thay vào phương trình còn lại để giải quyết tiếp.

b) Nhẩm nghiệm của phương trình này ta thấy $x = \dfrac{1}{3}$ là nghiệm. Từ đó thêm bớt lượng liên hợp cho $\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}$ là $\sqrt{\dfrac{1-2.\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}} = 1$. Sau đó sẽ đánh giá thừa số còn lại sau khi gom nhân tử, chú ý sử dụng điều kiện để đánh giá.

Lời giải.

a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$x^2 + x - 2xy - 2y = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2y \end{array}\right.$$

Xét $x = -1$ thay vào phương trình còn lại ta thu được $y = 10$.

Xét $x = 2y$ thay vào phương trình còn lại ta thu được $4y^2+5y-9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -\dfrac{9}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là $(-1;10), (2;1), \left(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{9}{4}\right)$.

b) Điều kiện $\dfrac{1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.

$$\sqrt{\frac{1-2x}{x}}=\frac{3x+x^2}{x^2+1}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1-2x}{x}}-1=\frac{3x+x^2}{x^2+1}-1$$
$$\Leftrightarrow\frac{\frac{1-2x}{x}-1}{\sqrt{\frac{1-2x}{x}}+1}=\frac{3x-1}{x^2+1}\Leftrightarrow\frac{1-3x}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}}+1\right)}=\frac{3x-1}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow(1-3x)\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}}+1\right)}+\frac{1}{1+x^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.\text{ Vì }\frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}}+1\right)}+\frac{1}{1+x^2}>0,\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$$

■

Bình luận. **a)** Một trong những cách hay gặp nhất khi giải về hệ phương trình là việc tìm ra nhân tử ở một trong hai phương trình, từ đó rút và thế vào phương trình còn lại. **b)** Sử dụng lượng liên hợp là một phương pháp sơ cấp và rất hữu hiệu để làm các bài phương trình khi chúng ta đã đoán biết được ít nhất 1 nghiệm đẹp. Bài này chúng ta cũng có thể bình phương hai vế, nhưng khá dài dòng và bậc của x là lên tới x^5.

Bài tập tương tự. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x(y-1)+2y=x(x+1)\\ \sqrt{2x-1}+xy-3y+1=0\end{cases}$.

Đáp số. $(1;1),(2-\sqrt{x};2-\sqrt{2})$.

Bài 4

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), kẻ đường kính AN. Lấy điểm M trên cung nhỏ BN(M khác B,N). Kẻ MD vuông góc với đường thẳng BC tại D. ME vuông góc với đường thẳng AC tại E, MF vuông góc với AB tại F.

a) Chứng minh ba điểm F,D,E thẳng hàng.

b) Chứng minh $\dfrac{AB}{MF}+\dfrac{AC}{ME}=\dfrac{BC}{MD}$.

c) Chứng minh $\dfrac{FB}{FA}+\dfrac{EA}{EC}+\dfrac{DC}{DB}\geq 3$.

Phân tích. **a)** Chúng ta có nhiều dữ kiện về góc, vì rất nhiều tứ giác nội tiếp được hình thành khi lấy hình chiếu của điểm M lên các đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác. Vậy ta sẽ chính minh hai góc ở vị trí đối đỉnh là bằng nhau. Phân tích ngược sau: $\widehat{BDF} = \widehat{EDC} \Leftrightarrow \widehat{BMF} = \widehat{EMC} \Leftrightarrow \widehat{FBM} = \widehat{ECM}$. Dễ thấy $\widehat{FBM} = \widehat{ECM}$ do vị trí góc ngoài và góc đối trong của tứ giác nội tiếp $ACMB$.

b) Để chứng minh đẳng thức tỷ số này, một suy nghĩ tự nhiên nhất là ta chia $\dfrac{BC}{MB}$ thành hai tỷ số, khi đó sẽ chứng minh hai cặp tỷ số bằng nhau. Từ đó cộng lại, ta có điều cần chứng minh.

c) Dễ nhận thấy đây là một đánh giá bất đẳng thức. Sử dụng $AM-GM$ sẽ đưa ra kết quả cần chứng minh là $\dfrac{FB}{FA}\cdot\dfrac{EA}{EC}\cdot\dfrac{DC}{DB} \geq 1$. Hơn thế biểu thức $\dfrac{FB}{FA}\cdot\dfrac{EA}{EC}\cdot\dfrac{DC}{DB}$ chính là kết quả từ định lý Menelaus hoặc Ceva.

Lời giải.

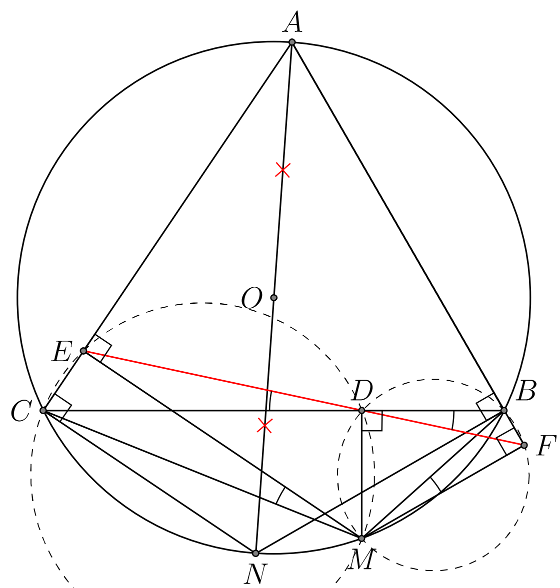
a) Ta có $MFBD, MDEC, MBAC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{BMF} = 90^\circ - \widehat{FBM}$ và $\widehat{EDC} = \widehat{EMC} = 90^\circ - \widehat{CEM}$.

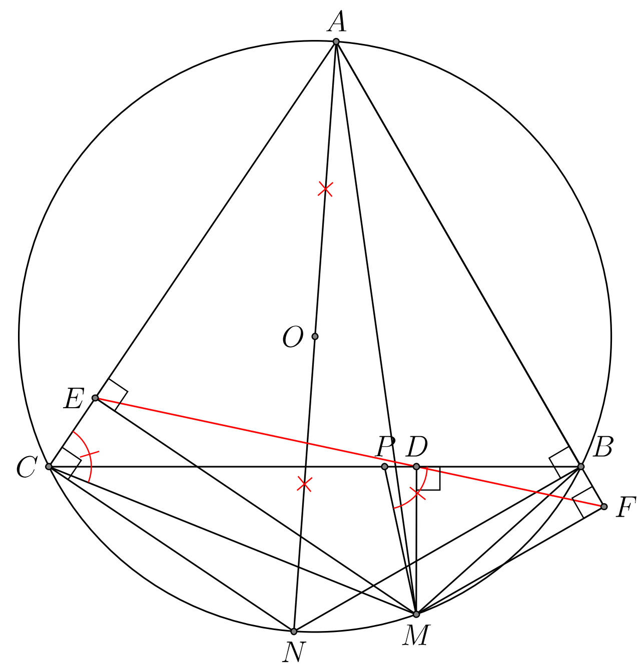
Hơn nữa $\widehat{FBM} = \widehat{CEM}$(góc ngoài bằng góc đối trong).

Do đó $\widehat{BDF} = \widehat{EDC}$, hai góc ở vị trí đối đỉnh.

Vậy D, E, F thẳng hàng.



b) Gọi $P \in BC$ sao cho $\widehat{BPM} = \widehat{ACM}$.
Suy ra $\Delta BPM \sim \Delta ACM$, từ đó có $\dfrac{BP}{BM} = \dfrac{AC}{AM}$.
Hơn nữa $\Delta AME \sim \Delta BMD$ suy ra $\dfrac{AM}{ME} = \dfrac{BM}{DM}$.
Vậy $\dfrac{AC}{ME} = \dfrac{BP}{DM}$.
Tương tự từ $\begin{cases} \Delta CPM \sim \Delta ABM \\ \Delta AMF \sim \Delta CMD \end{cases}$ suy ra $\dfrac{AB}{MF} = \dfrac{CP}{MD}$.
Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta có đpcm.



c) Từ câu **a)** áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến là D, E, F thu được $\dfrac{FB}{FA} \cdot \dfrac{EA}{EC} \cdot \dfrac{DC}{DB} = 1$.
Áp dụng BĐT $AM-GM$ ta có: $\dfrac{FB}{FA} + \dfrac{EA}{EC} + \dfrac{DC}{DB} \geq 3$.

Bình luận. **a)** Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, chúng ta nghĩ tới các cách giải quyết sau:

1. Tiên đề Euclide.
2. Góc ở vị trí đối đỉnh bằng nhau.
3. Góc bẹt.
4. Định lý Menelaus.

■

Bài 5

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $y^3 - 2x - 2 = x(x+1)^2$.

Phân tích. Phương trình nghiệm nguyên có dạng lập phương của y, các biến x, y "độc lập với nhau". Chuyển x, y sang hai vế, thêm bớt từ đó tìm được miền nghiệm nguyên của x dựa trên đánh giá y^3 với x^3 và $(x+1)^3$.

Lời giải. Ta có $y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$. Rõ ràng $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} \geq \dfrac{7}{8} > 0$.
Do đó $y^3 > x^3$.
Mặt khác, xét $|x| > 1$.
Khi đó $y^3 = (x+1)^3 + 1 - x^2 \leq (x+1)^3$, mẫu thuẫn vì $x^3 < y^3 < (x+1)^3$.
Vậy $|x| \leq 1$. Khi đó $x = \pm 1 \vee x = 0$.

TH1. $x = -1$. Thay vào pt được $y = 1$.

TH2. $x = 1$. Thay vào pt được $y = 2$.

TH3. $x = 0$. Thay vào pt được $y = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Z}$, loại.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $(-1; 1), (1; 2)$. ■

Bài 6

Cho a, b, c dương và $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 3a^4b^4c^4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} + \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} + \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

Phân tích. Đây là lớp các BĐT có điều kiện, từ điều kiện, chúng ta qui về điều kiện đơn giản hơn bằng cách chia hai vế cho $a^4b^4c^4$. Từ đó thu được $\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{b^4} + \dfrac{1}{c^4} = 3$. Tiếp tục, để đánh giá được những phân thức của vế trái của BĐT cần chứng minh, một trong các BĐT quen thuộc thường gặp là $\dfrac{1}{x+y} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right), \forall x, y > 0$. Từ đó thông qua các đánh giá $AM - GM$ với điểm rơi là $a = b = c = 1$ ta thu được kết quả.

Lời giải. **Cách 1.** Từ điều kiện đề bài ta có $\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{b^4} + \dfrac{1}{c^4} = 3$.
Trước hết ta chứng minh BĐT sau: Với $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

BĐT trên tương đương với $(x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geq 4$. BĐT này đúng theo $AM - GM$ như sau:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} > 0$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} > 0$$

Từ đó áp dụng vào ta có:

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b + 1} + \frac{1}{2c^2}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b} + 1\right) + \frac{1}{2c^2}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b} + \frac{2}{c^2} + 1\right)$$

Mà theo $AM-GM$ ta có $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\geq\frac{4}{a^3b}$ và $\frac{1}{c^4}+1\geq\frac{2}{c^2}$.
Nên $\frac{1}{a^3b+2c^2+1}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4a^4}+\frac{1}{4b^4}+\frac{1}{c^4}+2\right)$.
Tương tự ta có $\begin{cases}\frac{1}{b^3c+2a^2+1}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4b^4}+\frac{1}{4c^4}+\frac{1}{a^4}+2\right)\\ \frac{1}{c^3a+2b^2+1}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4c^4}+\frac{1}{4a^4}+\frac{1}{b^4}+2\right)\end{cases}$.
Cộng theo vế các BĐT trên lại ta có $VT\leq\frac{1}{16}\left(2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)+6\right)=\frac{3}{4}$.
Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Từ điều kiện ta có $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}=3$. Mặt khác: $3=\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\Rightarrow$ $abc\geq 1$.
Ta có $a^3b+2c^2+1\geq 4\sqrt[4]{a^3bc^4}\geq 4\sqrt[4]{a^2c^3}=4\sqrt{ac}\sqrt[4]{c}$. Do đó

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}\leq\frac{1}{4\sqrt{ac}\sqrt[4]{c}}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

Tương tự ta có $\begin{cases}\frac{1}{b^3c+2a^2+1}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{ba}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\\ \frac{1}{c^3a+2b^2+1}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\end{cases}$.
Cộng theo vế các BĐT trên lại ta có $VT\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$.
Mà theo BĐT BCS thì

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2\geq\frac{1}{27}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^4\geq\frac{1}{243}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^8$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\leq 3$. Tương tự:

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)^2$$

Suy ra $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\leq 3$. Từ đó ta có $VT\leq\frac{3+3}{8}=\frac{3}{4}$.
Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bình luận. Đây là một bất đẳng thức có điều kiện. Từ điều kiện chúng ta cần đưa ra một số đánh giá, nó rất quan trọng để định hướng giải cho bài BĐT cần chứng minh. Trong quá trình đánh giá luôn luôn phải xác định điểm rơi cho, ở đây điểm rơi tại $a=b=c=1$.

Bài tập tương tự. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3xyz$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^2+2y^2z^2+1}+\frac{1}{y^2+2z^2x^2+1}+\frac{1}{z^2+2x^2y^2+1}\leq\frac{3}{4}.$$