Từ phương trình ban đầu suy ra:

$$\begin{aligned}
&4(x+2)^2(3x-1) = \left(3x^2-7x-3\right)^2\\
&\Leftrightarrow 9x^4-54x^3-13x^2+10x+25=0.\\
&\Leftrightarrow \left(x^2-7x+5\right)\left(9x^2+9x+5\right)=0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{29}}{2}.
\end{aligned}$$

Dối chiếu điều kiện xác định và thử lại ta thấy $x=\dfrac{7+\sqrt{29}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{7+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

b) **Cách 1.** ĐKXĐ: $x, y \neq 0$.

Ta có hệ phương trình ban đầu tương đương với:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}-\dfrac{10}{x}=-1 & (1)\\ 20y-x-1=\dfrac{1}{y}. & (2)\end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta được: $20y-\dfrac{10}{x}=0 \Leftrightarrow xy=\dfrac{1}{2}$.

Thay $xy=\dfrac{1}{2}$ vào $(**)$ và giải ra ta được $y=\dfrac{3}{10} \vee y=\dfrac{-1}{4}$.

- Nếu $y=\dfrac{3}{10} \Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$.
- Nếu $y=\dfrac{-1}{4} \Rightarrow x=-2$.

Thử lại ta được nghiệm của hệ là $(\dfrac{5}{3};\dfrac{3}{10})$ và $(-2;\dfrac{-1}{4})$.

Cách 2. ĐKXĐ: $x, y \neq 0$.

Do $x, y \neq 0$ nên nhân hai vế của phương trình $(*)$ cho xy và phương trình $(**)$ cho x phương trình ban đầu trở thành:

$$\begin{cases} x^2y+x-10y+xy=0 & (1)\\ 20xy^2-x^2y-xy-x=0. & (2)\end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta được: $20xy^2-10y=0 \Rightarrow xy=\dfrac{1}{2}$ (do $y\neq 0$).

Tới đây giải tương tự cách 1, ta được nghiệm của hệ là $(\dfrac{5}{3};\dfrac{3}{10})$ và $(-2;\dfrac{-1}{4})$.

■

Bình luận. a) Đây là bài toán khá khó nếu học sinh không tiếp cận phương pháp "đặt ẩn phụ không hoàn toàn". Đa số học sinh dự đoán nghiệm để tìm hướng giải

nhưng hướng đó rất khó khăn khi nghiệm bài toán là một biểu thức chưa căn. Do đó, đối với các bài toán được cho ở dạng $(ax+b)\sqrt{cx+d} = ex^2+fx+g$ ta nên sử dụng phương pháp "đặt ẩn phụ không hoàn toàn" để giải quyết.

b) Câu hệ tương đối dễ so với các năm, dễ dàng nhìn ra hướng giải khi quy đồng phương trình $(*)$.

Bài tập tương tự.

a) 1) Giải phương trình: $(2x+1)\sqrt{x-3} = 2x^2-3x-7$.

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

2) Giải phương trình: $(4x+3)\sqrt{2x-1} = 5x^2+x-1$.

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

3) Giải phương trình: $(2x-1)\sqrt{2x+3} = x^2+x+3$.

Trích đề thi HSG lớp 10 tỉnh Đồng Nai năm 2017

b) 1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 4 \\ x^2 - 4x + 2xy = 1. \end{cases}$$

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + y^2 - 4y = -1 \\ 2x^2y^2 - y^4 - 6xy^2 = 1. \end{cases}$$

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

Bài 3

Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AN = AB = BM$. Các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K. Gọi H là hình chiếu của K lên AB. Chứng minh rằng:

a) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH.

b) Các đường đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

Phân tích. a) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Để chứng minh I nằm trên KH ta cần chú ý đến giả thiết bài toán là ΔABM,

ΔBAN lần lượt cân tại đỉnh B, A nên các phân giác BI, AI của $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ cũng đồng thời là đường cao của ΔABK. Khi đó, ta dễ dàng chứng minh I thuộc KH.

b) Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta AHC, \Delta BHC$.
Để chứng minh các đường đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau ta có khá nhiều hướng để khai thác như:

- Gọi J_1, J_2 lần lượt là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với HC.
  Ta chứng minh $HJ_1 = HJ_2 \Rightarrow J_1 \equiv J_2$.
- Chứng minh $I_1I_2 = r_1 + r_2$ trong đó r_1, r_2 lần lượt là bán kính $(I_1), (I_2)$.
- Chứng minh $I_1I_2 \perp HC$.

Dưới đây, tôi xin trình bày hướng đi đầu tiên.

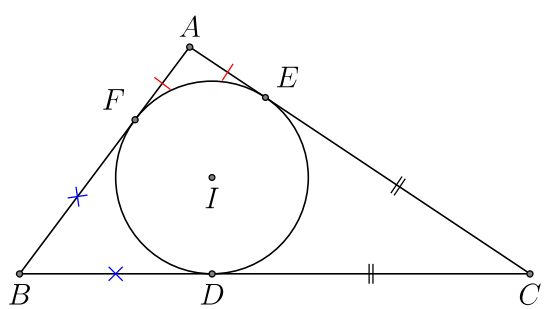
Lời giải. a) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Do ΔABM cân tại B nên phân giác BI của $\widehat{ABM}$ cũng đồng thời là đường cao.
Suy ra $BI \perp AM$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $AI \perp BN$.
Do đó, I là trực tâm ΔABM.
Mà $MH \perp AB$ nên M, I, H thẳng hàng.
Hay tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH.

b) Trước tiên tôi xin chúng minh bổ đề quen thuộc sau:
Bổ đề. *Cho (I) nội tiếp tam giác ABC. (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng:*

i) $AE = AF = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

ii) $BF = BD = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$.

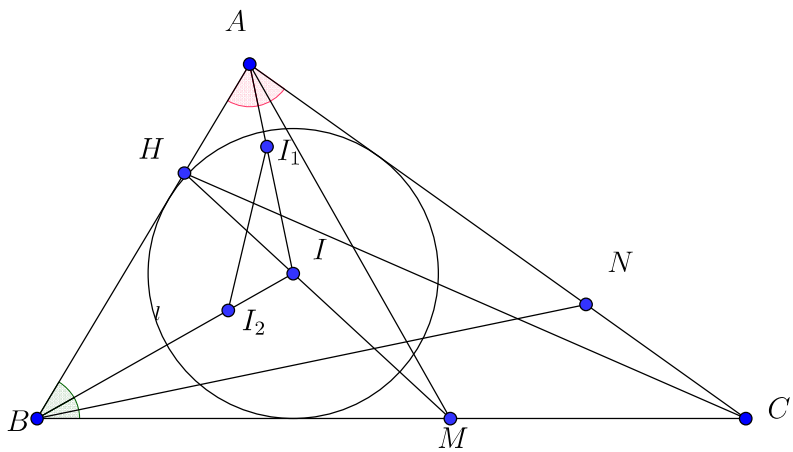
iii) $CE = CF = \dfrac{CA + CB - AB}{2}$.



Chứng minh. Ta chứng minh (i) còn những tính chất còn lại ta chứng minh tương tự.
Do (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F nên:

$$AE = AF, BF = BD, CD = CE.$$

Khi đó, $AB + AC - BC = (AF + BF) + (AE + CE) - (BD + CD) = 2AE = 2AF$.
Vậy $AE = AF = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.
Quay trở lại bài toán :



Gọi J_1, J_2 lần lượt là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với HC. Ta chứng minh $J_1 \equiv J_2$.
Áp dụng bổ đề trên ta có:

$$\begin{aligned} HJ_1 - HJ_2 &= \frac{HA + HC - AC}{2} - \frac{HB + HC - BC}{2} \\ &= \frac{HA - HB}{2} + \frac{BC - AC}{2} \\ &= \frac{(AB + AC - BC) - (BA + BC - AC)}{4} + \frac{BC - AC}{2} = 0. \end{aligned}$$

Vậy $J_1 \equiv J_2$.
Do đó, các đường đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

■

Bình luận. Đây là bài toán khá đơn giản thông qua các tính chất của tam giác cân và bổ đề quen thuộc.

Bài tập tương tự.

1) Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lấy các điểm M, N sao cho $AB = BM = AN$. Hai đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K. Gọi H là hình chiếu của K lên AB, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHC, BHC. I_1I_2 cắt HK, HC, AB theo thứ tự tại G, J, K.
Chứng minh rằng $HK^2 = KJ.KG$.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 4

Cho x, y là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

Phân tích. Ta có P gồm $\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}$ và $\frac{x^2+y^2}{xy}$. Như vậy, trong P xuất hiện $xy, x+y, x^2+y^2$. Để đơn giản bài toán ta cần đưa P về xy và $x+y$ như sau:

$$P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{xy} - 2.$$

Dễ thấy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 10 khi $x = y$.

Do đó, sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi tại $x = y$ ta được:

$$\frac{16\sqrt{xy}}{x+y} = 8, \frac{(x+y)^2}{xy} = 4.$$

Suy ra khi $x = y$ thì

$$\frac{8\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{8\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{xy} = 4.$$

Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số không âm ta dễ dàng tìm được giá trị nhỏ nhất của P (chú ý học sinh cần chứng minh bất đẳng thức AM-GM cho 3 số).

Ngoài ra, ta có thể sử dụng điều kiện bằng khi P đạt giá trị nhỏ nhất để thêm bớt các hằng số vào biểu thức để đánh giá như sau:

Khi $x = y$ thì $\frac{16\sqrt{xy}}{x+y} = 8, \frac{x^2+y^2}{xy} = 2$.

Khi đó, ta thêm bớt vào P các số 8, 2 để tạo ra các biểu thức phù hợp.

$$P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} - 8 + \frac{x^2+y^2}{xy} - 2 + 10 = \frac{(x-y)^2}{xy} - \frac{8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} + 10.$$

Tới đây ta có thể sử dụng phương pháp biến đổi tương đương kết hợp bất đẳng thức AM-GM để chứng minh:

$$\frac{(x-y)^2}{xy} - \frac{8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} \geq 0.$$

Lời giải. **Cách 1.** Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{xy} - 2 \\ &= \frac{8\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{8\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{xy} - 2 \\ &\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}.\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}.\frac{(x+y)^2}{xy}} - 2 = 10. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{8\sqrt{xy}}{x+y} = \dfrac{(x+y)^2}{xy} \Leftrightarrow x = y$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10 khi $x = y$.

Cách 2. Ta có: $P = \dfrac{16\sqrt{xy}}{x+y} - 8 + \dfrac{x^2+y^2}{xy} - 2 + 10 = \dfrac{(x-y)^2}{xy} - \dfrac{8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} + 10$.
Ta chứng minh $\dfrac{(x-y)^2}{xy} - \dfrac{8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} \geq 0 \quad (*)$.

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x-y)^2 - 8xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{xy(x+y)} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 - 8xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (x+y)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 8xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left[(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 8xy\right] \geqslant 0. \quad (**)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có:

$$(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 8xy \geqslant 2\sqrt{xy}.\left(2\sqrt{\sqrt{x}.\sqrt{y}}\right)^2 - 8xy = 0.$$

Vậy $(**)$ đúng hay $(*)$ đúng. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.
Do đó $P \geq 10$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10 khi $x = y$.
Cách 3. Ta có:

$$P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4(4\sqrt{xy}+x+y)}{xy(x+y)} + 10 \geq 10.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10 khi $x = y$. ■

Bình luận. Bài toán khá đơn giản. Học sinh chỉ cần nắm vững bất đẳng thức AM-GM kết hợp với kỹ thuật chọn điểm rơi là có thể giải bài toán.

Bài tập tương tự.

1) Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{8\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{a^3+b^3}{ab\sqrt{ab}}.$$

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

2) Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{18\sqrt{abc}}{a+b+c} + \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}.$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM