1 Đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong, TP HCM

Bài 1

a) Cho các số thực a, b, c sao cho $a + b + c = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 29$ và $abc = 11$. Tính $a^5 + b^5 + c^5$.

b) Cho biểu thức $A = (m + n)^2 + 3m + n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì $n^3 + 1$ chia hết cho m.

Phân tích. a) Để tính $a^5+b^5+c^5$, ta cần biểu diễn $a^5+b^5+c^5$ theo các biểu thức đối xứng chứa 3 biến a, b, c. Trong đó, bậc của a, b, c trong các biểu thức đó nhỏ hơn 5. Phân tích theo bậc ta dễ thấy:

i) $a^5+b^5+c^5 = (a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) - [a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a)]$.

ii) $a^5 + b^5 + c^5 = (a + b + c)(a^4 + b^4 + c^4) - [ab(a^3 + b^3) + bc(b^3 + c^3) + ca(c^3 + a^3)]$.
Như vậy, ta cần tính $ab + bc + ca, a^3 + b^3 + c^3, a^4 + b^4 + c^4$.

- $ab + bc + ca = \dfrac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$.
- Tính $a^3 + b^3 + c^3$.
  Đối với $a^3 + b^3 + c^3$ ta có rất nhiều đẳng thức biểu thị $a^3 + b^3 + c^3$ qua các biểu thức chứa 3 biến a, b, c (a, b, c đối xứng nhau) như sau:
  a) $a^3+b^3+c^3 = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) - [ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$.
  b) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
  c) $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$.
- $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

b) **Bước 1.** Ta cần tìm mối liên hệ giữa m và n để $A = (m+n)^2+3m+n$ là số chính phương. Do trong A xuất hiện $(m + n)^2$ nên hiển nhiên $A > (m + n)^2$. Như vậy, nếu ta tìm được số α ($\alpha \in \mathbb{N}^*$) nhỏ nhất sao cho $A < (m + n + \alpha)^2$ sau đó ta dùng phương pháp chặn để tìm biểu thức $f(m, n)$ sao cho $A = [f(m, n)]^2$.
Ta xét $3m + n < 2\alpha(m + n) + (\alpha)^2$. $(*)$
Dễ thấy $\alpha = 2$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa $(*)$.
Khi đó ta có $(m + n)^2 < (m + n)^2 + 3m + n < (m + n + 2)^2$.
Do đó $(m + n)^2 < A < (m + n + 2)^2$.

Từ đây, ta suy ra $A = (m+n+1)^2$. Do đó $m = n+1$.

Bước 2. Chứng minh $n^3 + 1 \vdots m$ (hiển nhiên).

Lời giải. a)

- Tính $ab + bc + ca$. Ta có

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)\\
\Leftrightarrow\ & 3^2 = 29 + 2(ab+bc+ca)\\
\Leftrightarrow\ & ab+bc+ca = -10.
\end{aligned}$$

- Tính $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Ta có:

$$\begin{aligned}
&(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)\\
\Leftrightarrow\ & (-10)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2.11.3\\
\Leftrightarrow\ & a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 34.
\end{aligned}$$

- Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

Cách 1.

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 &= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) - [ab(a+b) + bc(b+c)]\\
&= 29.3 - [ab(3-c) + bc(3-a) + ca(3-b)]\\
&= 87 - [3(ab+bc+ca) - 3abc]\\
&= 87 - [3.(-10) - 3.11]\\
&= 150.
\end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)\\
&= 27 - 3.[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc]\\
&= 27 - 3.[ab(3-c) + bc(3-a) + ca(3-b) + 2abc]\\
&= 27 - 3.[3(ab+bc+ca) - abc]\\
&= 27 - 3.[3.(-10) - 11]\\
&= 150.
\end{aligned}$$

Cách 3.

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc\\
&= 3[29 - (-10)] + 3.11 = 150.
\end{aligned}$$

- Tính $a^4 + b^4 + c^4$.

Cách 1.

$$\begin{aligned}
a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\\
&= 29^2 - 2.34 = 773.
\end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4 &= (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left[ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\right]\\ &= 3.150-\left[ab\left(29-c^2\right)+bc\left(29-a^2\right)+ca\left(29-b^2\right)\right]\\ &= 450-\left[29\left(ab+bc+ca\right)-abc\left(a+b+c\right)\right]\\ &= 450-\left[29.\left(-10\right)-11.3\right]\\ &= 773.\end{aligned}$$

- Tính $a^5+b^5+c^5$.

Cách 1.

$$\begin{aligned}a^5+b^5+c^5 &= (a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)-[a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a)]\\ &= 29.150-\left[a^2b^2(3-c)+b^2c^2(3-a)+c^2a^2(3-b)\right]\\ &= 4350-\left[3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-abc\left(ab+bc+ca\right)\right]\\ &= 4350-[3.34-11.(-10)]\\ &= 4138.\end{aligned}$$

‘ **Cách 2.**

$$\begin{aligned}a^5+b^5+c^5 &= (a+b+c)(a^4+b^4+c^4)-[ab(a^3+b^3)+bc(b^3+c^3)+ca(c^3+a^3)]\\ &= 3.773-[ab(150-c^3)+bc(150-a^3)+ca(150-b^3)]\\ &= 2319-\left[150\left(ab+bc+ca\right)-abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]\\ &= 2319-[150.(-10)-11.29]\\ &= 4138.\end{aligned}$$

b) Do $m,n\in\mathbb{N}^*$ suy ra

$$\begin{aligned}&3m+n<4(m+n)+4\\ \Rightarrow\ &(m+n)^2<A<(m+n)^2+4\left(m+n\right)+4\\ \Rightarrow\ &(m+n)^2<A<(m+n+2)^2.\end{aligned}$$

Do A là số chính phương nên $A=(m+n+1)^2$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}&(m+n)^2+3m+n=(m+n+1)^2\\ \Leftrightarrow\ &(m+n)^2+3m+n=(m+n)^2+2(m+n)+1\\ \Leftrightarrow\ &3m+n=2(m+n)+1\\ \Leftrightarrow\ &m=n+1.\end{aligned}$$

Khi đó ta có: $n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)\vdots(n+1)$.

Hay $n^3+1\vdots m$.

■

Bình luận. a) Đây là dạng toán khá quen thuộc và đã từng xuất hiện nhiều trong các kì thi tuyển sinh, thi học sinh giỏi trước đây. Để giải bài toán, đòi hỏi học sinh nắm vững các kỹ năng biến đổi đại số.

Lưu ý. Ta có thể tổng quát bài toán để tính $a^n + b^n + c^n$ (n là số nguyên dương) bằng cách đưa bài toán về dãy số truy hồi (cách này tôi xin gợi ý cách giải thông qua bài tập tương tự bên dưới). Với hướng này, chúng ta có thể tính $a^3 + b^3 + c^3$ bằng cách sau:

Do a, b, c thỏa : $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ ab + bc + ca = -10 \\ abc = 11. \end{cases}$

Nên theo định lí Vi-et ta có a, b, c là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 - 10x - 11 = 0$. Khi đó ta dễ thấy rằng:

$$\begin{cases} a^3 = 3a^2 + 10a + 11 \\ b^3 = 3b^2 + 10b + 11 \\ c^3 = 3c^2 + 10c + 11. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 10(a + b + c) + 33 = 3.29 + 10.3 + 33 = 150$.

b) Đây là bài toán tương đối hay khi đa số học sinh tập trung đi vào chứng minh chia hết. Do đó, vô tình học sinh đi ngược lại với mục đích thật sự của bài toán là tìm mối liên hệ giữa m, n để A là số chính phương.

Bài tập tương tự.

a) 1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 9, a^2 + b^2 + c^2 = 35, abc = 15$. Tính $a^9 + b^9 + c^9$.

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

2) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 8, a^2 + b^2 + c^2 = 30, abc = 10$. Đặt $S_n = a^n + b^n + c^n$. Chứng minh $S_{n+3} = 8S_{n+2} - 17S_{n+1} + 10S_n$.
Áp dụng tính S_4, S_5, S_{20}.

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

b) 1) Cho biểu thức $A = 4m^2 + n^2 + 4mn + 6m + n + 2$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là số chính phương thì $m^p + 1 \vdots n$ với p là số nguyên tố lớn hơn 2.

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

2) Cho $A = (n^2 - n + 2m)^2 + 6n^2 + 4m + 2n + 1$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là số chính phương thì $(n^k + 1) \vdots (m + 2)$ (với $k \in \mathbb{N}$, k lẻ) và $n^s - 1 \vdots m, \forall s \in \mathbb{N}^*$.

Phạm Quốc Sang-SV ĐHSP TPHCM

Bài 2

a) Giải phương trình: $2(x+2)\sqrt{3x-1} = 3x^2 - 7x - 3$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} - \dfrac{10}{x} = -1 & (*) \\ 20y^2 - xy - y = 1. & (**) \end{cases}$

Phân tích. a) Dễ thấy phương trình ban đầu có dạng

$$(ax+b)\sqrt{cx+d} = ex^2 + fx + g.$$

Nếu bài toán dạng này có nghiệm đẹp ta có khá nhiều phương pháp để giải nhưng nếu phương trình không có nghiệm đẹp hoặc ta không đoán được nghiệm thì ta thường sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn để giải.

Để sử dụng phương pháp này, ta cần đặt $t = \sqrt{3x-1}$ sau đó đưa phương trình ban đầu về dạng $g(x,t) = 0$ với bậc của x và t trong $g(x,t)$ đều cùng bằng hai hoặc ít nhất một trong hai biến x, t bằng hai và biến còn lại có bậc không quá hai.

Khi phân tích vế phải của phương trình ban đầu theo t ta sẽ giữ nguyên $3x^2$ vì nếu ta phân tích $3x^2$ theo t thì khi đó bậc của t lúc này là bậc 4. Như vậy, phương trình của ta sẽ trở thành phương trình bậc 4 theo biến t (điều này đi ngược với mục đích ban đầu).

Vậy ta sẽ phân tích phương trình ban đầu thành:

$$2(x+2)\sqrt{3x-1} = 3x^2 + ax + b(3x-1) + c \ (*).$$

Trong đó: $\begin{cases} a + 3b = -7 \\ -b + c = -3. \end{cases} (**)$

Đặt $t = \sqrt{3x-1}$ $(t \geq 0)$ thì phương trình $(*)$ trở thành

$$\begin{aligned} & 3x^2 + ax + bt^2 + c = 2(x+2)t \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 + (a - 2t)x + bt^2 - 4t + c = 0 \\ & \Delta = (a-2t)^2 - 4.3\left(bt^2 - 4t + c\right) = (4 - 12b)t^2 - 4t(a - 12) + a^2 - 12c. \end{aligned}$$

Ta chọn a, b, c bất kì thỏa $(**)$ và Δ là số chính phương.

Chọn $b = -1$ suy ra $a = -4$ và $c = -4$.

Ngoài ra, ta có thể giải bài toán bằng cách bình phương hai vế để đưa về phương trình bậc 4 là $9x^4 - 54x^3 - 13x^2 + 10x + 25 = 0$.
Để giải phương trình trên ta có thể sử dụng tham số hóa để tách vế trái của phương trình thành tích của hai tam thức bậc hai. Sau đó ta giải từng phương trình "con".

b) Chỉ cần quy đồng hai vế của phương trình $(*)$ là ta có thể nhận ra sự tương đồng về hệ số đối với phương trình $(**)$. Hoặc chia hai vế của phương trình $(**)$ cho y ta cũng nhận thấy sự tương đồng về hệ số đối với phương trình $(*)$. Từ đó, ta có thể cộng vế theo vế để tìm mối liên hệ giữa x và y.

Lời giải. a) **Cách 1.** ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} &2(x+2)\sqrt{3x-1} = 3x^2 - 7x - 3 \\ \Leftrightarrow\ &2(x+2)\sqrt{3x-1} = 3x^2 - 4x - (3x-1) - 4. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{3x-1}$ $(t \geq 0)$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$$\begin{aligned} &3x^2 - 4x - t^2 - 4 - 2(x+2)t = 0 \\ \Leftrightarrow\ &3x^2 - 2(t+2)x - t^2 - 4t - 4 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Ta xem $(*)$ là phương trình bậc hai theo biến x, tham số t. Ta có:

$$\Delta'_* = (t+2)^2 - 3\left(-t^2 - 4t - 4\right) = (2t+4)^2.$$

Khi đó:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{(t+2)-(2t+4)}{3} = \dfrac{-t-2}{3} \leqslant -\dfrac{2}{3} \text{ (mẫu thuẫn với ĐKXĐ do } t \geq 0) \\ x = \dfrac{(t+2)+(2t+4)}{3} = t+2. \end{array}\right.$$

Giải phương trình:

$$\begin{aligned} x = t+2 \Leftrightarrow x - 2 &= \sqrt{3x-1} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 3x - 1 \end{cases}. \\ \Leftrightarrow &\ x = \frac{7+\sqrt{29}}{2}. \end{aligned}$$

Thử ta được tập ngiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{7+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Cách 2. ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{1}{3}$.