

**Đáp án chuyên đề:**

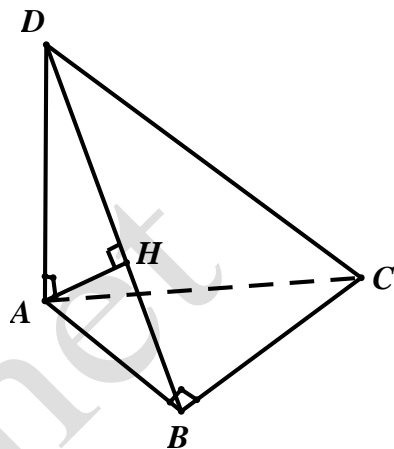
**Đường thẳng và mặt phẳng vuông góc - Hình học 11**

26. a) Ta có  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp BC$ .

Do đó  $\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

b) Ta có  $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy  $\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp SC$ .



27. a) Ta có O là trung điểm của AC và  $SA = SC \Rightarrow SO \perp AC$ .

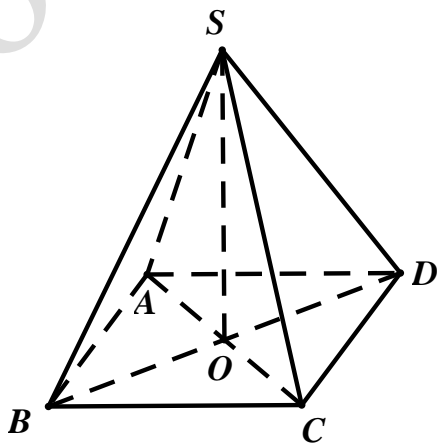
Tương tự  $SO \perp BD$ .

Vậy  $\left. \begin{array}{l} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ .

b) Ta có  $AC \perp BD$  (do ABCD là hình thoi).

Lại có  $AC \perp SO$  (do  $SO \perp (ABCD)$ )

Suy ra  $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$ .



28.

a) Ta có

$$\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$$

Lại có  $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$

$$\text{Vậy } \left. \begin{array}{l} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (OAH)$$

$$\Rightarrow BC \perp AH \quad (1).$$

$$\text{Tương tự } \left. \begin{array}{l} AC \perp OB \\ AC \perp OH \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (OBH)$$

$$\Rightarrow BH \perp AC \quad (2).$$

Từ (1),(2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Đặt  $OA = a, OB = b, OC = c$

$$\text{Ta có } BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\text{Tương tự } AC = \sqrt{a^2 + c^2}, AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} > 0 \text{ suy ra } A \text{ nhọn.}$$

Tương tự các góc B, C nhọn.

$$\text{c) Ta có } S_{ABC}^2 = \frac{1}{4} AI^2 BC^2 = \frac{1}{4} (OI^2 + OA^2) (OB^2 + OC^2)$$

$$= \frac{1}{4} OI^2 BC^2 + \frac{1}{4} OA^2 OB^2 + \frac{1}{4} OA^2 OC^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$$

d) Gọi I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có :  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$

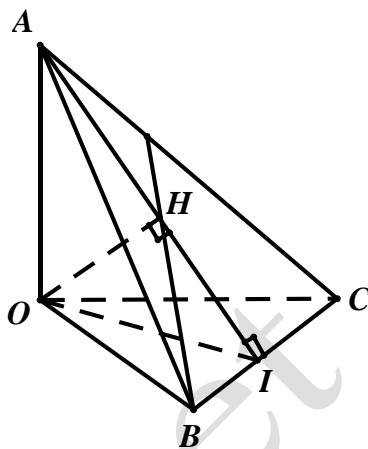
$$\Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = 3(\vec{MI} + \vec{IO})^2$$

$$\Leftrightarrow (\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) \vec{MI} = 3 \vec{IO} \cdot \vec{MI} \Leftrightarrow 3 \vec{IG} \cdot \vec{MI} = 3 \vec{IO} \cdot \vec{MI} \Leftrightarrow \vec{OG} \vec{MI} = 0 \Leftrightarrow MI \perp OG \quad ($$

do  $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 3 \vec{IG}$ )

Vậy M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG.

29.



a) Ta có  $\left. \begin{matrix} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \perp (BCE)$

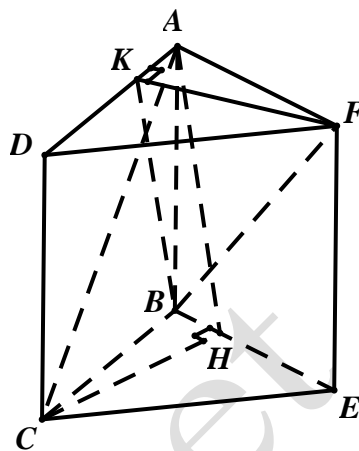
$\Rightarrow AB \perp CH.$

Vậy  $\left\{ \begin{matrix} CH \perp AB \\ CH \perp BE \end{matrix} \right. \Rightarrow CH \perp (ABEF)$

$\Rightarrow CH \perp AH$ , hay  $\triangle ACH$  vuông tại H.

Tương tự  $\left. \begin{matrix} FK \perp AD \\ FK \perp AB \end{matrix} \right\} \Rightarrow FK \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \triangle BFK$  vuông tại K.



b) Ta có  $CH \perp (ABEF) \Rightarrow CH \perp BF$ , mặt khác  $AC \perp BF \Rightarrow BF \perp (ACH) \Rightarrow BF \perp AH.$

Tương tự  $\left. \begin{matrix} AC \perp KF \\ AC \perp BF \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC \perp (BKF) \Rightarrow AC \perp BK.$

30. Ta có

$$IS = \sqrt{AI^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

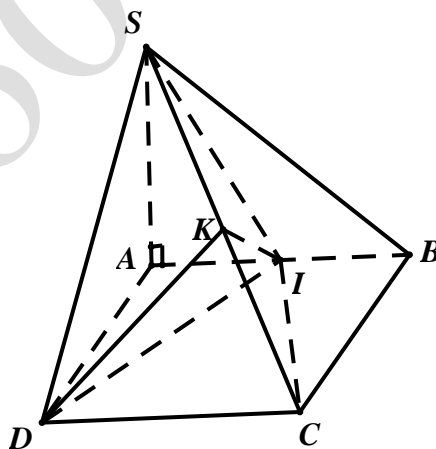
Tương tự  $ID = IC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  suy ra

$IS = ID = IC$  nên I thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD.

Mặt khác  $\left\{ \begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{matrix} \right. \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \triangle SCD$  vuông tại D,

lại có K là trung điểm của SC nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD, do đó  $KI \perp (SCD).$



Ta có  $IK^2 = ID^2 - DK^2 = ID^2 - \frac{1}{4}SC^2 = ID^2 - \frac{1}{4}(SA^2 + AC^2)$

$$\frac{5a^2}{4} - \frac{1}{4}(a^2 + 2a^2) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

31. Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)

Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC.

Và  $(DA, (ABC)) = (DA, AH) = DAH = \alpha$

Đặt  $DA = a, DB = b, DC = c$

Gọi  $I = AH \cap BC$  thì DI là đường cao của tam

giác DBC nên  $DI = \frac{DB \cdot DC}{BC} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

$$\cot^2 \alpha = \frac{DA}{DI} = \frac{a^2(b^2 + c^2)}{b^2 c^2}$$

$$\Rightarrow 2 + \cot^2 \alpha = 2 + \frac{a^2(b^2 + c^2)}{b^2 c^2} \geq 2 + \frac{2a^2}{bc} \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}}$$

$$\text{Vậy } 2 + \cot^2 \alpha \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } 2 + \cot^2 \beta \geq \frac{4b}{\sqrt{ac}} \quad (2) \text{ và } 2 + \cot^2 \gamma \geq \frac{4c}{\sqrt{ab}} \quad (3)$$

Nhân theo vế các BĐT (1),(2),(3) ta được

$$(2 + \cot^2 \alpha)(2 + \cot^2 \beta)(2 + \cot^2 \gamma) \geq 64 \quad (\text{đpcm})$$

32.

a) Ta có  $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$

$$\text{lại có } \begin{cases} HK \parallel BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp HK$$

$$\Rightarrow AC \perp (SHK).$$

b) Dễ thấy

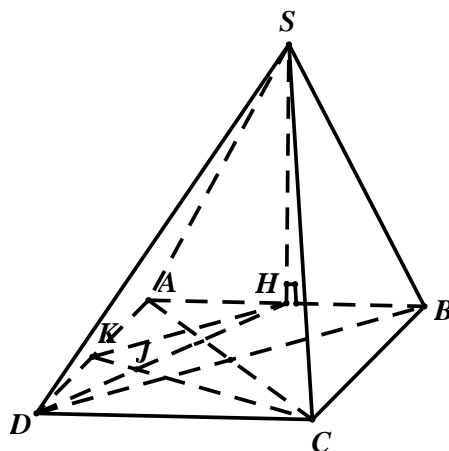
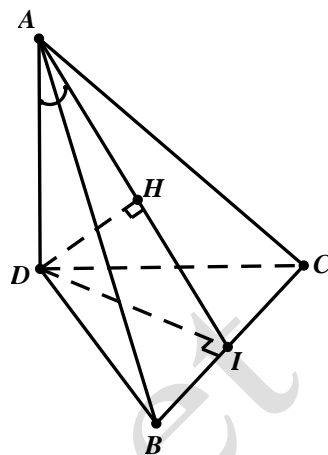
$$\triangle AHD = \triangle DKC \Rightarrow \angle AHD = \angle DKC$$

$$\text{mà } \angle AHD + \angle ADH = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DKC + \angle ADH = 90^\circ \text{ hay } DH \perp CK,$$

mặt khác ta có

$$SH \perp CK \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD$$



33.

a) Gọi  $I = AH \cap BC$ , để chứng minh AH, SK và BC đồng qui.

Ta cần chứng minh SI là đường cao của tam giác SBC, nhưng điều này đúng do  $BC \perp SA$  và  $BC \perp AI$ .

b) Ta có  $SB \perp CK$

thêm nữa ta có

$$\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB$$

Vậy  $SB \perp (CHK)$ .

b) Theo các chứng minh trên ta có

$$SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \text{ và}$$

$$BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp HK \text{ do đó } HK \perp (SBC).$$

**34.**

a) Ta có  $AB \perp (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} AB \perp BM \\ AB \perp BC \end{cases}$  suy ra các

tam giác ABM và ABC vuông tại B.

Tiếp theo ta có  $\begin{cases} MC \perp MB \\ MC \perp AB \end{cases} \Rightarrow MC \perp (ABM)$

$\Rightarrow MC \perp AM$  hay tam giác ACM vuông tại M.

b) Ta có  $\begin{cases} BH \perp AM \\ BH \perp MC \end{cases} \Rightarrow BH \perp (ACM)$

$\Rightarrow BH \perp AC$ .

Vậy  $\begin{cases} AC \perp BH \\ AC \perp BK \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BHK)$ .

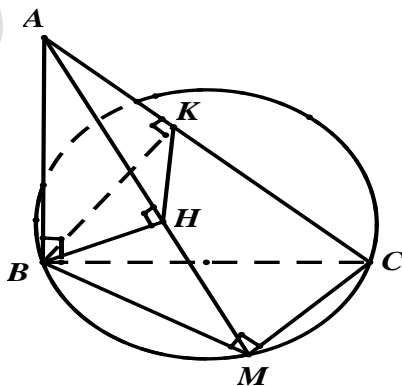
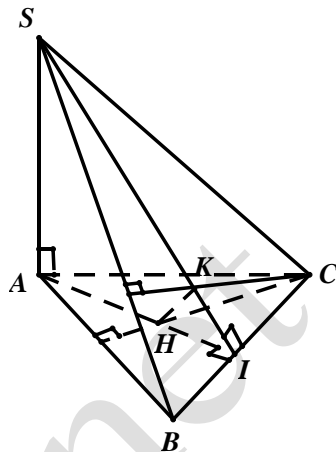
c) Dễ thấy BK cố định và  $BHK = 90^\circ$  nên điểm H thuộc đường tròn đường kính BK. Từ đó ta có tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BK.

d)  $MA^2 = AB^2 + BM^2$  mà AB không đổi nên AM lớn nhất khi MB lớn nhất  $\Leftrightarrow BM = BC \Leftrightarrow M \equiv C$ .

e) Ta có  $S_{BHK} = \frac{1}{2} BH \cdot HK \leq \frac{BH^2 + HK^2}{4} = \frac{BK^2}{4}$  không đổi nên

$$\max S_{BHK} = \frac{BK^2}{4} \Leftrightarrow BH = HK, \text{ lúc này } \triangle HBK \text{ vuông cân tại H nên}$$

$$BH = \frac{BK}{\sqrt{2}}.$$



Ta có  $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2}; \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2}$

nên  $2\left(\frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}\right) = \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BA^2} \Leftrightarrow \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{2}{BC^2}$

$\Leftrightarrow MB = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{2BA^2 + BC^2}}$

Vậy  $\max S_{BHK} = \frac{BK^2}{4} \Leftrightarrow MB = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{2BA^2 + BC^2}} \Leftrightarrow M$  là các giao điểm của

đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính.

**35.**

a) Vì H là trung điểm của AB và tam giác SAB đều nên  $SH \perp AB$

Lại có  $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SC = a\sqrt{2},$

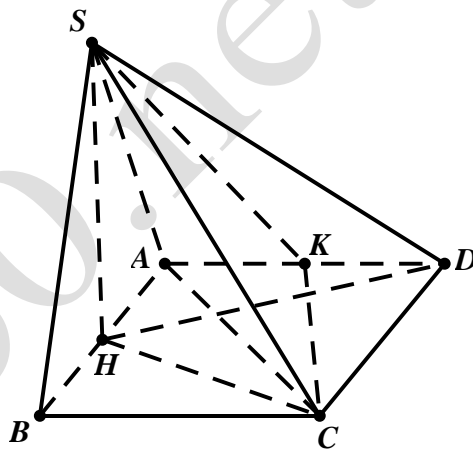
$HC = \sqrt{DH^2 + DC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó

$HC^2 + HS^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = 2a^2 = SC^2$

$\Rightarrow \Delta HSC$  vuông tại H  $\Rightarrow SH \perp HC$

Vậy  $\begin{cases} SH \perp HC \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$



b) Ta có  $AC \perp HK$  và  $AC \perp SH \Rightarrow AC \perp (SHK)$

$\Rightarrow AC \perp SK.$

Tương tự  $CK \perp HD$  (như bài 32) và  $CK \perp SH \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD.$

**36.**

a)  $\Delta SBC$  vuông tại B  $\Rightarrow BC \perp SB$  mà  $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SA.$

Tương tự ta có  $SA \perp CD$  nên  $SA \perp (ABCD).$

Ta có

$$SC = \sqrt{DS^2 + DC^2} = a\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a.$$

Vậy  $SA = a$ .

$$b) \text{ Do } \begin{cases} IJ \perp AC \\ IJ \perp SA \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (SAC) \Rightarrow IJ \perp SC$$

Lại có

$$AH \perp SC \Rightarrow (HIJ) \perp SC \Rightarrow AK \perp SC \quad (1)$$

$$\text{Để thấy } BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra  $AK \perp (SBC)$ .

Lập luận tương tự ta có  $AL \perp (SCD)$ .

$$37. a) \text{ Ta có } \begin{cases} (\alpha) \perp AB \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow SA \parallel (\alpha)$$

Do đó

$$\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MN \parallel SA$$

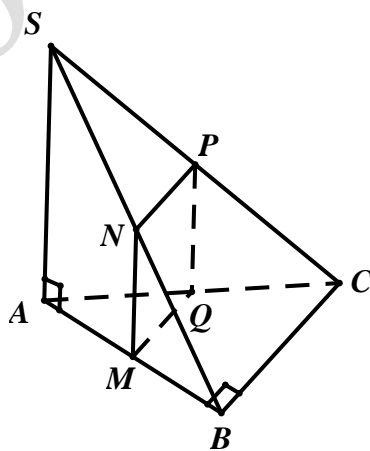
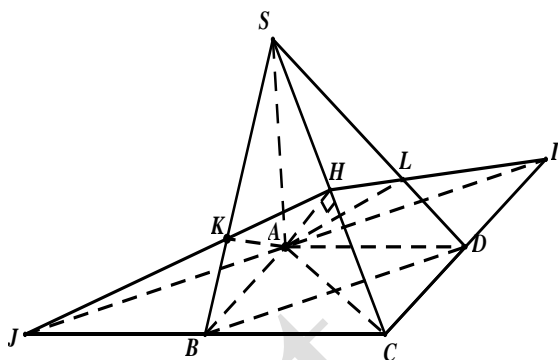
$$\text{Tương tự } \begin{cases} (\alpha) \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (\alpha)$$

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ \parallel BC, Q \in AC$$

$$\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = NP \parallel BC, P \in SC.$$

Thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .

b) Ta có  $MN \parallel SA, PQ \parallel SA \Rightarrow MN \parallel PQ$  và  $MQ \parallel BC, NP \parallel BC \Rightarrow MQ \parallel NP$   
nên  $MNPQ$  là hình bình hành.



Mặt khác  $\begin{cases} MN \parallel SA \\ NP \parallel BC \Rightarrow MN \perp NP \text{ . Vậy } MNPQ \text{ là hình chữ nhật.} \\ SA \perp BC \end{cases}$

b) Ta có  $MQ = AM = x$ ,  $\frac{MN}{SA} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow MN = \frac{MB \cdot SA}{AB} = \frac{(a-x)a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}(a-x)$

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \sqrt{3}(a-x)x = \sqrt{3} \left[ \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right] \leq \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\max S_{MNPQ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ khi } x = \frac{a}{2}.$$

38. a) Gọi K là hình chiếu của A trên SC thì  $K \in (\alpha)$ . Trong (SAC) gọi

$$I = SO \cap AK.$$

Ta có  $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SC$ , mặt khác  $(\alpha) \perp SC$  nên

$BD \parallel (\alpha)$ .

Vậy  $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (SBD) \\ BD \subset (SBD) \\ BD \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = HL \parallel BD, H \in SD, L \in SB$

Thiết diện là tứ giác AHKL.

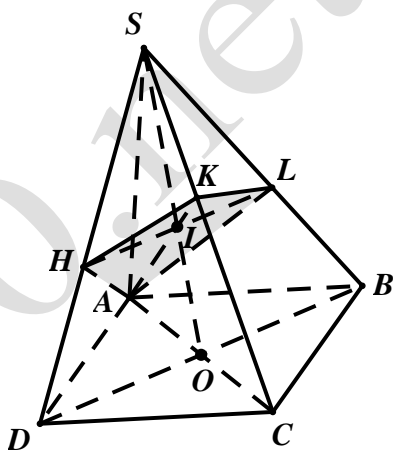
b) Do  $\begin{cases} HL \parallel BD \\ BD \perp AK \end{cases} \Rightarrow HL \perp AK \Rightarrow S_{AHKL} = \frac{1}{2} AH \cdot KL$

Ta có  $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC$  cân tại A, mà  $AK \perp SC$  nên K là trung điểm của SC  $\Rightarrow AK = \frac{SC}{2} = \frac{2a}{2} = a$ .

$$HL \parallel BD \Rightarrow \frac{HL}{BD} = \frac{SH}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HL = \frac{2}{3} BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Vậy } S_{AHKL} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

39. a) Vì S.ABC là hình chóp đều nên





$SO \perp (ABC)$  ( $O$  là tâm tam giác

$ABC$ ). Do đó  $SO \perp AA_1$  mà

$(\alpha) \parallel AA_1 \Rightarrow SO \parallel (\alpha)$ .

Tương tự ta cũng có  $BC \parallel (\alpha)$

**Trường hợp 1.**  $x = 0$  thì thiết diện là điểm  $A$ .

**Trường hợp 2.**  $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$  thì  $M$

thuộc đoạn  $AO$  ( $M \neq A$ ).

Ta có :

$$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ \parallel BC, I \in AB, J \in AC$$

Tương tự  $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MK \parallel SO, K \in SA$ .

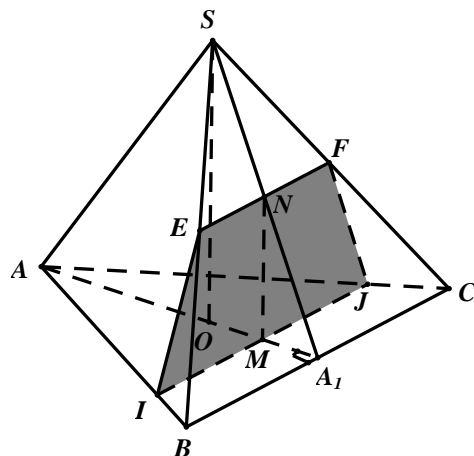
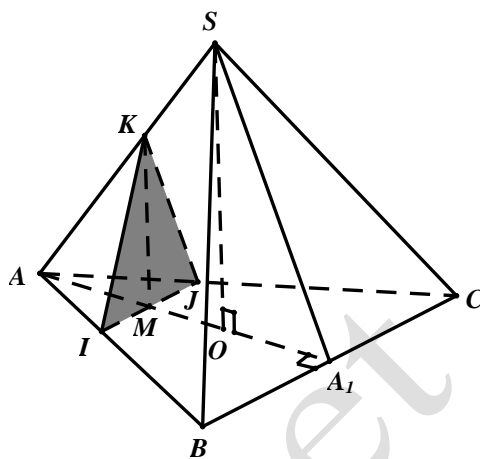
Thiết diện là tam giác  $KIJ$ .

**Trường hợp 3.**  $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$  khi đó  $M$  thuộc

đoạn  $OA$  ( $M \neq O; M \neq A$ )

Tương tự như trường hợp trên ta có:

$$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ \parallel BC, I \in AB, J \in AC$$



$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MN \parallel SO, N \in SA_1 \\ SO \parallel (\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC \subset (SBC) \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = EF \parallel IJ, N \in EF \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases}$$

Thiết diện là tứ giác IJEF.

**Trường hợp 4.**  $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  thì thiết diện là đoạn BC.

b) Xét các trường hợp:

$$x = 0 \Rightarrow S_{\text{td}} = 0, \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\text{td}} = 0$$

$$0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}, \text{ thì } S_{\text{IJK}} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK.$$

$$\text{Ta có } IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Tương tự } \frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow MK = 2x\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{\text{IJK}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2.$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{2}}{3}, \text{ dễ thấy IJEF là hình thang nên } S_{\text{IJEF}} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$$

$$IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA_1} = \frac{OM}{OA_1} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow EF = 2(x\sqrt{3} - a)$$

$$\frac{MN}{SO} = \frac{MA_1}{OA_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow MN = 2(3a - 2x\sqrt{3})$$

$$\text{Vậy } S_{\text{IJEF}} = \frac{2}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(3a - 2x\sqrt{3}).$$

Xét các trường hợp ta thấy  $S_{td}$  lớn nhất trong trường hợp  $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$

và  $\max S_{IIEF} = \frac{3a^2}{4}$  khi  $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$ .

40. Kẻ  $CH \perp (P)$  thì CKH là góc giữa CK và (P) và dễ thấy

$$(\angle CA, (P)) = \angle CAH = \alpha, (\angle CB, (P)) = \angle CBH = \beta$$

Đặt  $CH = h$ , ta có  $CA = \frac{h}{\sin \alpha}, CB = \frac{h}{\sin \beta}$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 = \frac{h^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{h^2}{\sin^2 \beta}$$

$$= h^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right).$$

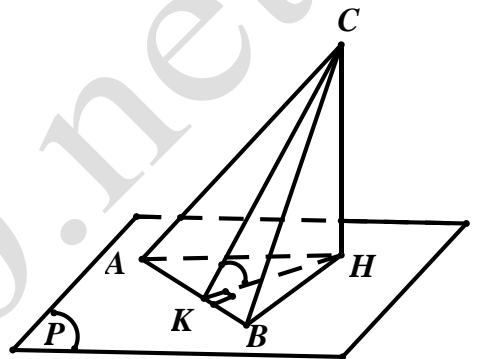
Xét tam giác ABC có  $CK \cdot AB = CA \cdot CB$

$$\Rightarrow CK = \frac{CA \cdot CB}{AB} = \frac{\frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{h}{\sin \beta}}{\sqrt{\frac{1}{h^2} \left( \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \right)}}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}}.$$

Ta có  $\sin \angle CKH = \frac{CH}{CK} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$ .

41.



a) Dễ thấy  $(SA, (ABCD)) = \angle SAO = \varphi$

nên  $SO = SA \cos \varphi$  (1).

Gọi I là trung điểm của BC thì ta có

$$\begin{cases} OI \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIO)$$

Kẻ  $OK \perp SI$  thì  $OK \perp BC$  nên

$OK \perp (SBC)$ .

Kẻ  $At \parallel OK$  cắt CK tại H, khi đó ta

$$\text{có } \begin{cases} AH \parallel CK \\ CK \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \text{ nên}$$

$(SA, (SBC)) = \angle SAH = \varphi$  do đó

$AH = SA \cos \varphi$  (2).

Từ (1), (2) ta có  $AH = SO$ .

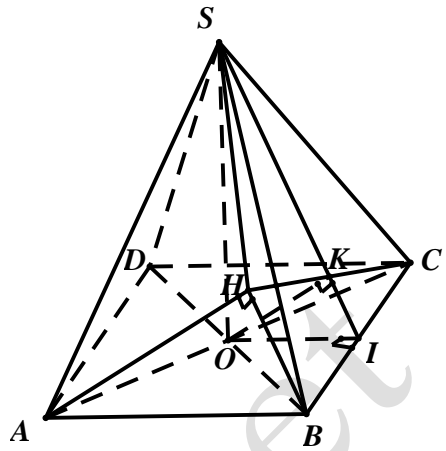
Khi  $BH = \frac{a}{2}$  thì trong tam giác vuông HAB có

$$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow SO = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{b) } \tan \varphi = \frac{SO}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \varphi = \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

42.



a) Do  $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD))$

$$= \angle SAC = \alpha.$$

Tương tự  $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$$\Rightarrow (SC, (SAB)) = \angle SCB = \beta.$$

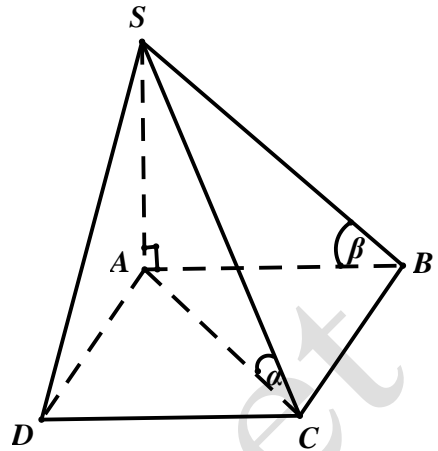
$$SA = SC \sin \alpha = a \sin \alpha$$

$$b) SB = SC \sin \beta = a \sin \beta$$

$$AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \beta - a^2 \sin^2 \alpha}$$

$$= a \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$= a \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$



**43. (HS tự giải)**

**44.**

a) Vì  $\begin{cases} BC \perp DH \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH)$

$$\Rightarrow BC \perp DA \quad (1)$$

Tương tự ta có

$(BDH) \perp AC \Rightarrow DB \perp AC$ , vì vậy

$\begin{cases} DB \perp DC \\ DB \perp AC \end{cases} \Rightarrow DB \perp (ACD)$

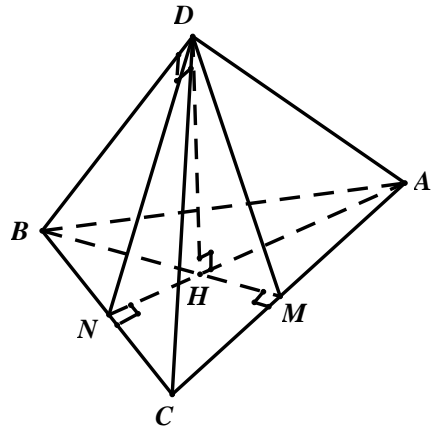
$$\Rightarrow DB \perp DA \quad (2).$$

Từ (1),(2) suy ra

$$DA \perp (BCD) \Rightarrow DA \perp DC \text{ ha } \angle CDA = 90^\circ.$$

b) Từ câu a) ta thấy tứ diện ABCD có các cạnh DA, DB, DC đôi một vuông góc.

Theo BĐT Cauchy-Schwraz ta có



$$(AB + BC + CA)^2 \leq 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Mà  $\begin{cases} AB^2 = DA^2 + DB^2 \\ BC^2 = DB^2 + DC^2 \\ CA^2 = DA^2 + DC^2 \end{cases}$  nên  $(AB + BC + CA)^2 \leq 6(DA^2 + DB^2 + DC^2)$ .

Đẳng thức xảy ra khi  $AB = BC = CA \Rightarrow \Delta ABC$  đều, kết hợp với chân đường cao của D trùng với tâm đáy ta được D.ABC là hình chóp đều đỉnh D.

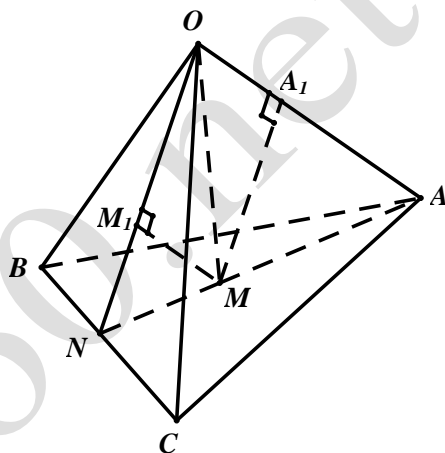
**45.**

a) Gọi  $N = AM \cap BC$ , kẻ  $MM_1 \parallel OA$

thì ta có

$$\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ MM_1 \parallel OA \end{cases} \Rightarrow MM_1 \perp (OBC)$$

kẻ  $MA_1 \perp OA, A_1 \in OA$ . Khi đó



$$\begin{aligned} AM^2 &= AA_1^2 + MA_1^2 = AA_1^2 + MO^2 - OA_1^2 = OM^2 + (AA_1 - OA_1)(AA_1 + OA_1) \\ &= OM^2 + OA(OA - 2OA_1) \\ &= OM^2 + OA^2 - 2OA \cdot OA_1 \end{aligned}$$

Suy ra  $\frac{AM^2}{OA^2} = \frac{OM^2}{OA^2} + 1 - \frac{2OA_1}{OA}$  (1).

Tương tự gọi  $B_1, C_1$  là các điểm tương tự như  $A_1$  thì ta có

$$\frac{MB^2}{OB^2} = \frac{OM^2}{OB^2} + 1 - \frac{2OB_1}{OB}$$
 (2)

$$\frac{MC^2}{OC^2} = \frac{OM^2}{OC^2} + 1 - \frac{2OC_1}{OC}$$
 (3)

Từ (1),(2),(3) ta có  $T = OM^2 \left( \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right) - 2 \left( \frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC} \right) + 3$

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì ta đã biết kết quả quen thuộc

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2} \text{ nên } T = \frac{OM^2}{OH^2} - 2 \left( \frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC} \right) + 3$$

Mặt khác  $\frac{OA_1}{OA} = \frac{NM}{NA} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự  $\frac{OB_1}{OB} = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \frac{OC_1}{OC} = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$  nên  $\frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC} = 1$

Do đó  $T = \frac{OM^2}{OH^2} + 1 \geq 2$  do  $OM \geq OH$ .

Vậy  $\min T = 2$  khi  $M \equiv H$ .

**Cách 2.** Đặt  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ . Do  $A, B, C, M$  đồng phẳng nên tồn tại  $x, y, z$  sao cho  $\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$  ( $x + y + z = 1$ ).

Ta có  $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA} = (x-1)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ , bình phương vô hướng ta được

$$AM^2 = (x-1)^2 a^2 + y^2 b^2 + z^2 c^2 \Rightarrow \frac{MA^2}{OA^2} = (x-1)^2 + \frac{y^2 b^2}{a^2} + \frac{z^2 c^2}{a^2}$$

Tương tự  $\frac{MB^2}{OB^2} = \frac{x^2 a^2}{b^2} + (y-1)^2 + \frac{z^2 c^2}{b^2}, \frac{MC^2}{OC^2} = \frac{x^2 a^2}{c^2} + \frac{y^2 b^2}{c^2} + (z-1)^2$

Vì vậy  $T = \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) + 1$

$$\geq \left( \frac{1}{a} \cdot ax + \frac{1}{b} \cdot by + \frac{1}{c} \cdot cz \right)^2 + 1 = 2 \quad (\text{Theo Cauchy-Schwarz})$$

Vậy  $\min T = 2$ .

b) Dễ thấy  $\alpha = \text{AOH}, \beta = \text{BOH}, \gamma = \text{COH}$ .

Ta có  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2} \Leftrightarrow \left( \frac{OH}{OA} \right)^2 + \left( \frac{OH}{OB} \right)^2 + \left( \frac{OH}{OC} \right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1)$$

Lại có  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} \quad (*)$

Áp dụng CT (\*) cho  $x$  nhận các giá trị  $\alpha, \beta, \gamma$  và kết hợp với (1) thu được

$$\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{\cot^2 \beta}{1 + \cot^2 \beta} + \frac{\cot^2 \gamma}{1 + \cot^2 \gamma} = 1$$

Đặt  $x = \cot^2 \alpha, y = \cot^2 \beta, z = \cot^2 \gamma$  ( $x, y, z > 0$ ) thì bài toán trở thành

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} = 1$ . Chứng minh  $xyz \leq \frac{1}{8}$ .

Ta có  $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq 2 \sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \geq 2 \sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}} \quad (2).$$

Tương tự ta có :

$$\frac{1}{1+y} \geq 2 \sqrt{\frac{xz}{(1+x)(1+z)}} \quad (3) \quad \text{và} \quad \frac{1}{1+z} \geq 2 \sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}} \quad (4)$$

Nhân theo từng vế các BĐT (2),(3)(4) ta được  $xyz \leq \frac{1}{8}$  (dpcm).

c) Tương tự như câu b) ta có  $\min S = 6\sqrt{3}$ .