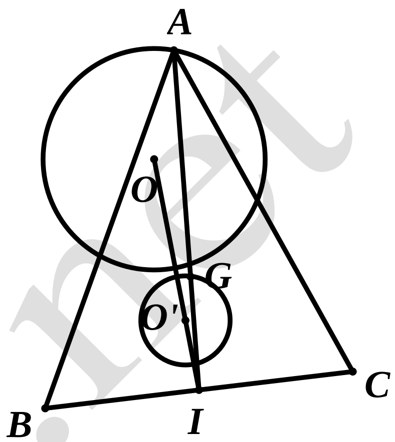
Đáp án chuyên đề:

Phép vị tự - Hình học 11

43. $d':2x-y+10=0$, $(C'):(x+3)^2+(y-8)^2=36$.

44. Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định

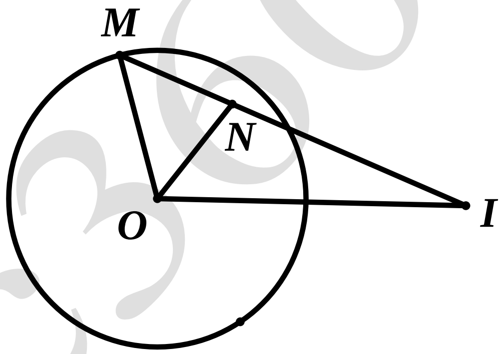


Và $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}\Rightarrow V_{\left(I;\frac{1}{3}\right)}(A)=G$ mà $A\in(O;R)$ nên

$G\in\left(O';\frac{R}{3}\right)$ ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự $V_{\left(O;\frac{1}{3}\right)}$.

45. Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{IN}{NM}=\frac{OI}{OM}=\frac{OI}{R}$$



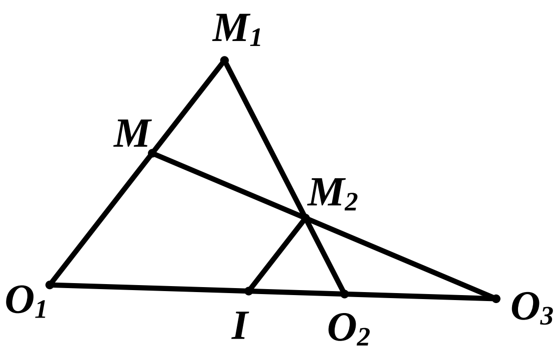
$$\frac{IN}{IN+NM}=\frac{OI}{OI+R}$$

$$\Leftrightarrow\frac{IN}{IM}=\frac{OI}{OI+R}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{IN}=\frac{OI}{OI+R}\overrightarrow{IM}$$

$\Rightarrow V_{(I;k)}(M)=N$ với $k=\frac{OI}{OI+R}$, mà $M\in(O;R)$ nên $N\in\left(O';\frac{OI.R}{OI+R}\right)$ ảnh của (O) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{OI}{OI+R}$.

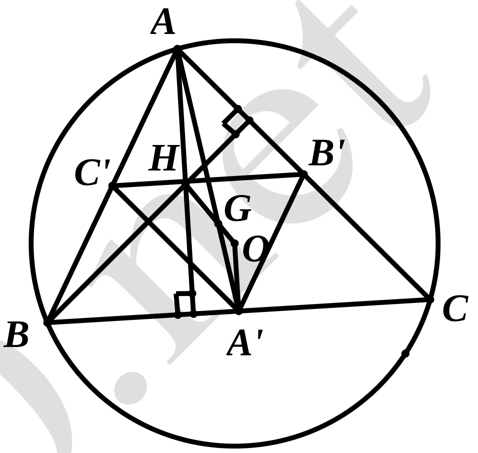
46. Gọi $V_{(O_1,k_1)};V_{(O_2,k_2)}$ là hai phép vị tự. Lấy điểm M bất kì. Giả sử $V_{(O_1,k_1)}:M\to M_1$ và $V_{(O_1,k_2)}:M_1\to M_2$ ta sẽ chứng minh với $k_1k_2\neq 1$ thì $V=V_{(O,k_2)}\circ V_{(O,k_1)}$ là một phép vị tự có tâm $k=k_1k_2$



Gọi $I = V_{(O_2,k_2)}(O_1) \Rightarrow \overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$, khi đó $\overrightarrow{IM_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$. Gọi O_3 là điểm xác định bởi $\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$.

Ta có $\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1M} = k_1k_2\overrightarrow{O_3M}$.

47. Gọi A',B',C' lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB, ta có :



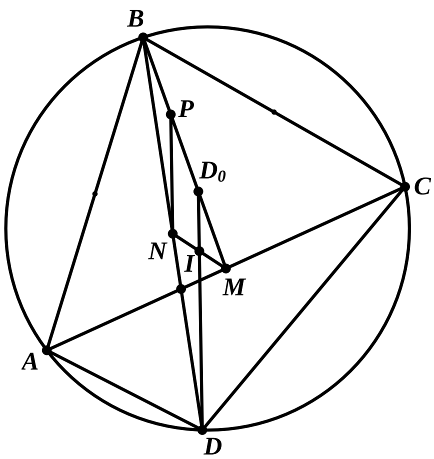
$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{GB'}$
$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

Dó đó $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)} : \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$

Vì H là trực tâm của tam giác ABC và O là trực tâm của tam giác $A'B'C'$ nên $V_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}(H) = O$

$\Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. Vậy G,H,O thẳng hàng.

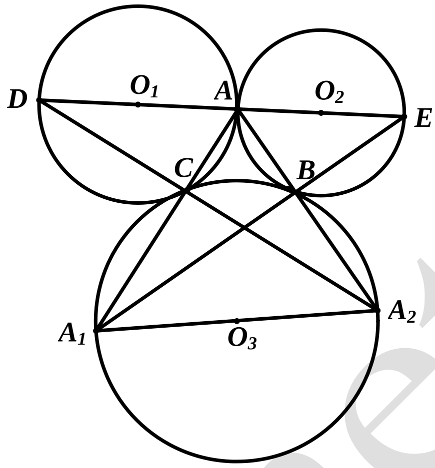
48. Gọi D_0 là trọng tâm tam giác ABC; M,N là trung điểm của các đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm của MN và P là trung điểm của BD_0 khi đó $NP \mathbin{/\!/=} \frac{1}{2}DD_0$ (1) và do D_0 là trọng tâm tam giác ABC nên $MD_0 = D_0P = PB$ suy ra $ID_0 \mathbin{/\!/=} \frac{1}{2}NP$ (2). Từ $(1)\&(2)$ suy ra D,D_0,I thẳng hàng và $ID_0 = \frac{1}{2}NP = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}DD_0 = \frac{1}{4}DD_0$



$\Rightarrow ID_0 = \frac{1}{3}ID \Rightarrow \overrightarrow{ID_0} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ID} \Rightarrow V_{\left(I,-\frac{1}{3}\right)} : D \to D_0$ mà $D \in (\zeta)$

(đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$) nên $D_0 \in (\zeta')$ ảnh của đường tròn (ζ) qua phép vị tự $V_{\left(I,-\frac{1}{3}\right)}$.

49. Vì hai đường tròn (O_1) và (O_3) tiếp xúc ngoài tại C nên $V_{\left(C;-\frac{R_1}{R_3}\right)}:(O_3;R_3)\to(O_1;R_1)$ nên trong phép vị tự này $A_1\to A, A_2\to D \Rightarrow A_1A_2\to AM$.



$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = -\frac{R_1}{R_3}\overrightarrow{A_1A_2}$ (1)

Xét phép vị tự $V_{\left(A,-\frac{R_2}{R_1}\right)}$ thì $D\to E, A\to A$ nên $DA\to AE \Rightarrow \overrightarrow{AE} = -\frac{R_2}{R_1}\overrightarrow{AD}$ (2).

Xét phép vị tự $V_{\left(B,-\frac{R_3}{R_2}\right)}$ giả sử $E\to B_1, A\to B_2 \Rightarrow EA\to B_1B_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1B_2} = -\frac{R_3}{R_2}\overrightarrow{EA}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$ mà A_1A_2, B_1B_2 là các dây cung của (O_3) và A_1A_2 là đường kính nên chỉ xảy ra trường hợp $B_1 \equiv A_1, B_2 \equiv A_2$, hay $V_{\left(B,-\frac{R_3}{R_2}\right)}: A\to A_2$ nên A, B, A_2 thẳng hàng.

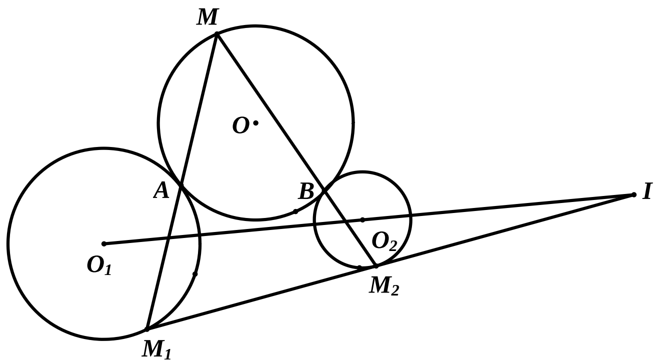
50. Do (O) và (O_1) tiếp xúc ngoài tại A nên $V_{\left(A,-\frac{R}{R_1}\right)}:(O_1;R_1)\to(O;R)$

Mà MA cắt (O_1) tại M_1 nên trong phép vị tự này $M_1\to M$

Tương tự $V_{\left(B,-\frac{R_2}{R}\right)}:(O;R)\to(O_2;R_2)$ nên $M\to M_2$ vậy

$F = V_{\left(B;-\frac{R_2}{R}\right)}\circ V_{\left(A;-\frac{R}{R_1}\right)} = V_{\left(I,\frac{R_2}{R_1}\right)}(M_1) = M_2$,

mà $F((O_1)) = (O_2)$ nên I chính là tâm



vị tự ngoài của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Vậy M_1M_2 luôn đi qua điểm I cố định.