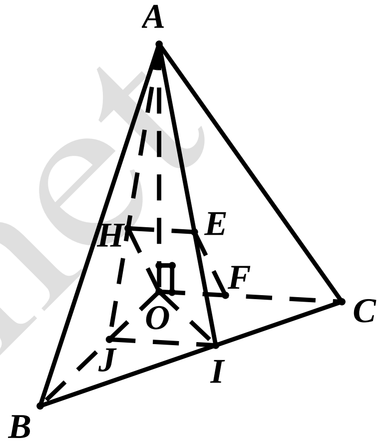
Đáp án chuyên đề: Khoảng cách - Hình học 11

64.

a) Do $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OI$

Lại có $OB = OC$ và I là trung điểm của BC nên $OI \perp BC$. Vậy OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC.



$OI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

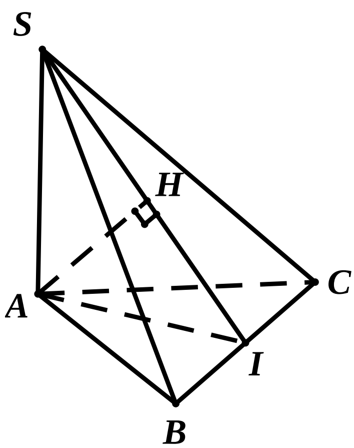
b) Gọi J là trung điểm của OB thì mặt phẳng (AIJ) chứa AI và song song với OC. Hạ $OH \perp AJ, H \in AJ$.

Ta có $\begin{cases} IJ \,//\, OC \\ OC \perp (OAB) \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (OAB) \Rightarrow IJ \perp OH$ vì vậy $OH \perp (AIJ)$. Từ H kẻ đường thẳng song song với IJ cắt AI tại E, từ E kẻ đường thẳng song song với OH cắt OC tại F thì EF là đoạn vuông góc chunh của AI và OC.

Trong tam giác OAJ có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $EF = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

65. Gọi I là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $AI \perp BC$, mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow (SAI) \perp (SBC)$ do đó hạ $AH \perp SI$ tại H thì $AH \perp (SBC)$.



Vậy $d(A,(SBC)) = AH$.

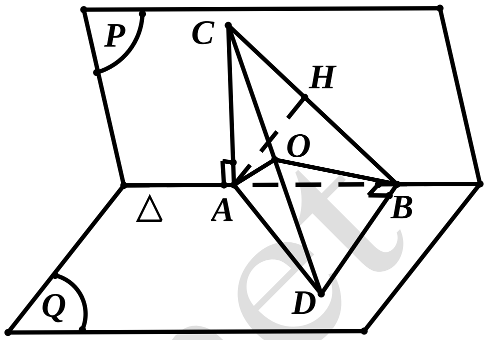
Ta có $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ suy ra

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Hay $d\left(A,(SBC)\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

66. Chứng minh được AB, AC, AD đôi một vuông góc , từ đó tính được $d\left(A,(DBC)\right)=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$.



67. Gọi O là trung điểm của CD

Ta có $(P)\perp(Q)$ và $\Delta=(P)\cap(Q)$, mà $AC\perp\Delta$

$\Rightarrow AC\perp(Q)\Rightarrow AC\perp AD\Rightarrow \Delta ACD$

vuông tại $A \Rightarrow OA=OC=OD$.

Tương tự ΔBCD vuông tại B

$\Rightarrow OB=OC=OD$.

Vậy $OA=OB=OC=OD$.

Hạ $AH\perp CB$ thì $\begin{cases} AH\perp BC \\ AH\perp BD \end{cases}\Rightarrow AH\perp(BCD)$ do đó $d\left(A,(BCD)\right)=AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

.

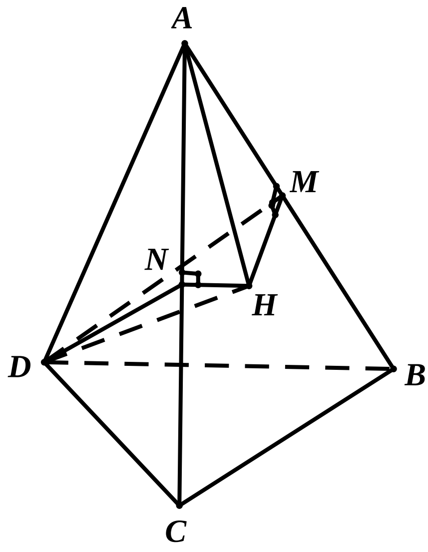
68. Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)

Hạ $HM\perp AB, HN\perp AC$.

Xét hai tam giác vuông AMD và AND có AD chung, $MAD=NAD=60^0$ nên

$\Delta MAD=\Delta NAD \Rightarrow DM=DN\Rightarrow HM=HN$

do đó AH là đường phân giác góc A của tam giác ABC.



Ta có $AM=AD\cos 60^0=\dfrac{c}{2}$.

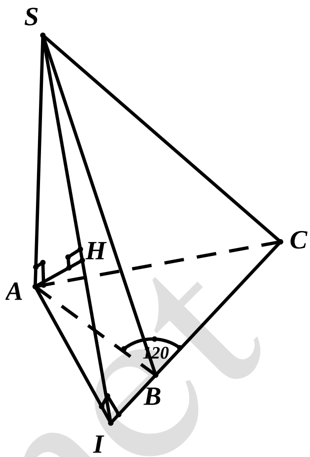
$$AH=\frac{AM}{\cos 30^0}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

$$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{c^2-\frac{c^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d\left(D,(ABC)\right)=\dfrac{c\sqrt{6}}{3}$.

69. Kẻ $AI \perp BC, I \in BC$, ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAI)$.



Kẻ $AH \perp SI$ thì $\begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Vậy $d(A,(SBC)) = AH$.

Ta có $ABI = 60^0$, $AI = AB\sin 60^0 = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

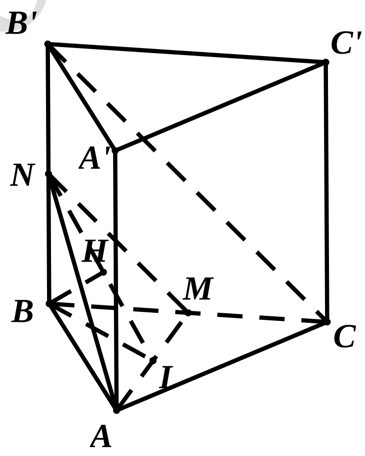
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}.$$

Vậy $d(A,(SBC)) = \dfrac{3a}{2}$.

70. Gọi N là trung điểm của BB' ; ta có

$\begin{cases} B'C \,//\, MN \\ MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow B'C \,//\, (AMN)$ do đó



$d(AM, B'C) = d(B',(AMN))$. Mặt khác N là trung điểm của BB' nên $d(B',(AMN)) = d(B,(AMN))$

Kẻ $BI \perp AM$ thì $AM \perp (BNI)$, kẻ $BH \perp NI \Rightarrow BH \perp (AMN)$ nên $d(B,(AMN)) = BH$.

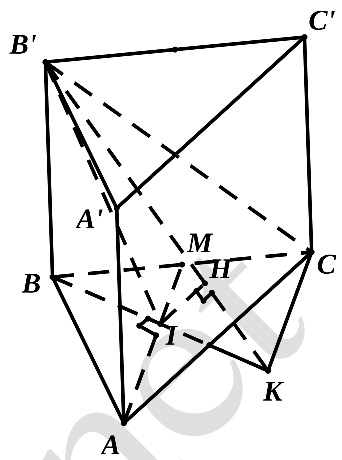
Ta có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BN^2} + \dfrac{1}{BI^2}$

$= \dfrac{1}{BN^2} + \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BM^2} = \dfrac{7}{a^2}$.

$\Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. Vậy $d(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 2. Kẻ $BI \perp AM$ thì $(IBB') \perp AM$, kẻ $CK \,//\, AM$ thì $CK \perp (IBB')$

Xét phép chiếu vuông góc lên (IBB') thì ta có $B'K$ là hình chiếu của $B'C$ trên (IBB') nên $d(AM,B'C)=d(I,B'K)$.



Hạ $IH\perp B'K, H\in B'K$, ta có

$\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BM^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow BI=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Dễ thấy $BK=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ và

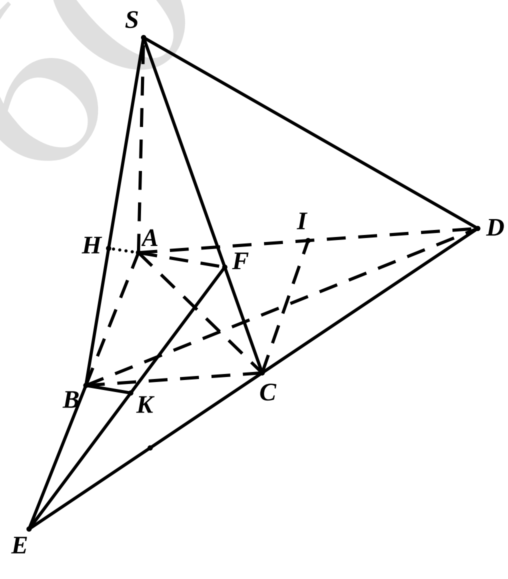
$B'K=\sqrt{BK^2+BB'^2}=\sqrt{\frac{a^2}{5}+2a^2}=a\sqrt{\frac{14}{5}}$.

Ta có $\Delta KHI\sim\Delta KBB'\Rightarrow\frac{IH}{BB'}=\frac{IK}{B'K}$

$\Rightarrow IH=\frac{IK.BB'}{B'K}=\frac{a\sqrt{5}}{5}.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{5}}{a\sqrt{14}}=\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $d(AM,B'C)=\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

71. Gọi I là trung điểm của AD, thế thì $IA=ID=IC=\frac{AD}{2}$ nên ΔACD vuông tại C $\Rightarrow CD\perp AC(1)$



Lại có $SA\perp(ABCD)$ $\Rightarrow SA\perp CD$ (2). Từ $(1),(2)$ suy ra $CD\perp(SAC)\Rightarrow CD\perp SC$, hay tam giác SCD vuông tại C.

Gọi d_1,d_2 lần lượt là khoảng cách từ B,H đến (SCD).

Ta có

$\frac{d_2}{d_1}=\frac{SH}{SB}=\frac{SH.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{2}{3}$

$d_2=\frac{2}{3}d_1$.

Kẻ $AF\perp SC$ thì dễ thấy $AF\perp(SCD)$, kẻ $BK//AF, K\in EF$ thì $d_1=BK$.

Gọi $E=AB\cap CD$.

Ta có $\frac{BK}{AF}=\frac{EB}{EA}=\frac{1}{2}\Rightarrow BK=\frac{1}{2}AF$.

Mặt khác,trong tam giác vuông SAC ta có

$$\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow AF=a$$

$$\Rightarrow KB=\frac{a}{2}\Rightarrow d_1=\frac{a}{2}\Rightarrow d_2=\frac{2}{3}.\frac{a}{2}=\frac{a}{3}$$

Vậy $d\left(H,(SCD)\right)=d_2=\frac{a}{3}$.

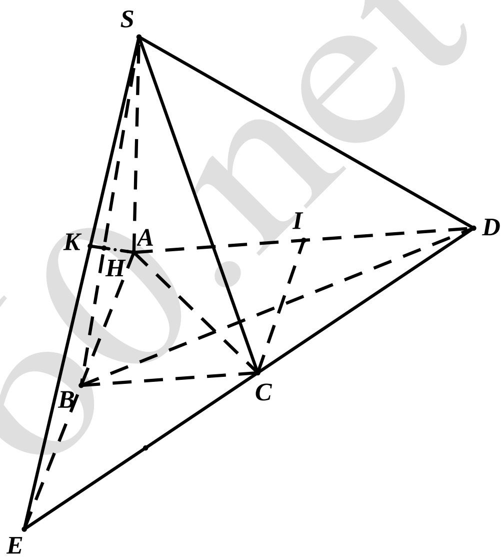
Lưu ý: Có thể tính khoảng cách từ H đến (SCD) theo cách khác như sau:

Gọi $E=AB\cap CD, K=AH\cap SE$

Dễ thấy B là trung điểm của AE và $\frac{SH}{SB}=\frac{2}{3}$ nên H là trọng tâm của tam giác ASE.

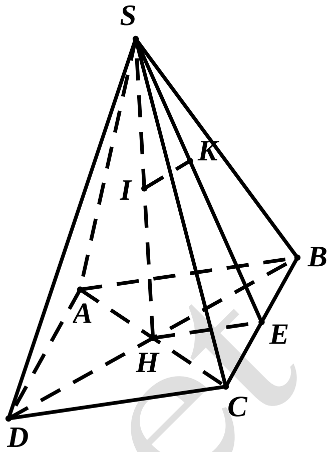
Ta có $\frac{d\left(H,(SCD)\right)}{d\left(A,(SCD)\right)}=\frac{KH}{KA}=\frac{1}{3}$

Tứ diện $ABES$ có AB, AE, AS đôi một vuông góc nên



$$\frac{1}{d^2\left(A,(SCD)\right)}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{a^2}.$$

$$\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=a\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=\frac{a}{3}.$$



72. Gọi E là trung điểm của BC, ta có

$$\begin{cases} BC \perp HE \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHE)$$

$\Rightarrow (SHE) \perp (SBC)$. Do đó $IK \perp SE$ thì

$IK \perp (SBC) \Rightarrow IK = b$.

Ta có $\Delta SKI \sim \Delta SHE \Rightarrow \dfrac{IK}{HE} = \dfrac{SK}{SH}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{HE.SK}{IK}$ $(*)$, mà

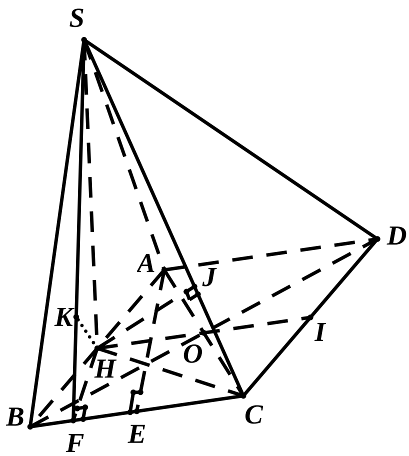
$HE = \dfrac{a}{2}, IK = b, SK = \sqrt{SI^2 - IK^2} = \sqrt{\dfrac{SH^2}{4} - b^2}$

nên

$(*) \Leftrightarrow SH = \dfrac{a}{2b}\sqrt{\dfrac{SH^2}{4} - b^2} \Leftrightarrow SH = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

Vậy $SH = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

73. a) Gọi $I = HO \cap CD \Rightarrow \dfrac{d(O,(SCD))}{d(H,(SCD))} = \dfrac{OI}{HI} = \dfrac{1}{2}$



Tam giác ABC đều nên $CH \perp AB$ mà $AB // CD \Rightarrow CH \perp CD$.

Mặt khác $CD \perp SH$ do đó $CD \perp (SHC)$, kẻ

$HJ \perp SC, J \in SC \Rightarrow HJ \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(H,(SCD)) = HJ$.

Ta có $HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, trong tam giác SHC có

$\dfrac{1}{HJ^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{HS^2}$

$= \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2}$.

$\Rightarrow HJ = a\sqrt{\dfrac{3}{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow d(O,(SCD)) = \dfrac{1}{2}d(H,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$

b) Ta có $B = AB \cap (SBC)$ nên $\dfrac{d(A,(SBC))}{d(H,(SBC))} = \dfrac{BA}{BH} = 2$

Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BC,BE thì $\begin{cases} AE \perp BC \\ HF \,//\, AE \end{cases} \Rightarrow HF \perp BC$

Vậy $\begin{cases} BC \perp HF \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHF) \Rightarrow (SBC) \perp (SHF)$, do đó kẻ $HK \perp SF$ thì $HK \perp (SBC)$ nên $d(H,(SBC)) = HK$.

Ta có $HF = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HF^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{16}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{19}{3a^2}$

$\Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \Rightarrow d(A,(SBC)) = 2d(H,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d(A,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

74.

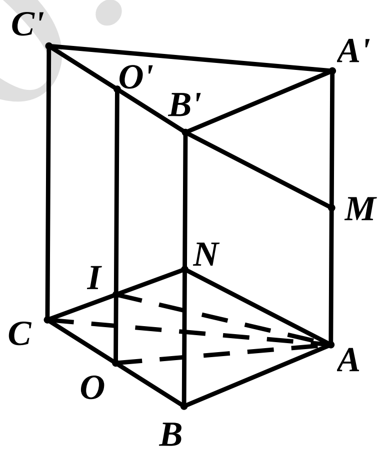
Gọi O,O' lần lượt là trung điểm của $BC,B'C'$, $I = OO' \cap CN$.

Do $\begin{cases} B'M \,//\, AN \\ AN \subset (ACN) \end{cases} \Rightarrow B'M \,//\, (CAN)$

$\Rightarrow d(B'M,CN) = d(B'M,(ACN))$

$= d(B',(ACN))$ (1).

Mặt khác N là trung điểm của BB' nên $d(B',(ACN)) = d(B,(CAN))$ (2).



Ta có

$CB \cap (CAN) = C \Rightarrow \dfrac{d(B,(CAN))}{d(O,(CAN))} = \dfrac{CB}{CO} = 2$ (3)

Dễ thấy tứ diện $OACI$ có OA,OC,OI đôi một vuông góc nên

$\dfrac{1}{d^2(O,(ACN))} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OI^2}$ (4)

Dễ thấy $OC=\frac{a}{2},OI=\frac{CN}{2}=\frac{a}{4},OA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\frac{1}{d^2\left(O,\left(ACN\right)\right)}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{16}{a^2}=\frac{64}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d\left(O,\left(ACN\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{8}\quad (5).$$

Từ $(1),(2),(3),(4),(5)$ ta có $d\left(B'M,CN\right)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

75.

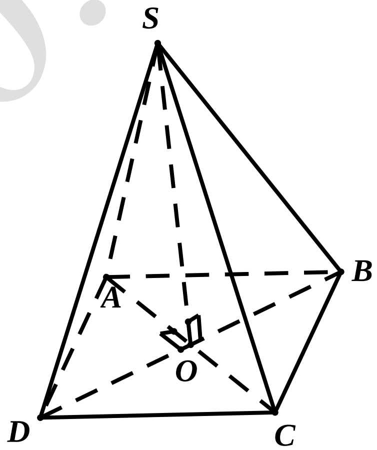
a) Ta có $AO\cap(SBC)=C$ nên $\frac{d\left(A,\left(SBC\right)\right)}{d\left(O,\left(SBC\right)\right)}=\frac{CA}{CO}=2\ \ (1)$

Mặt khác dễ thấy tứ diện $OBCS$ có các cạnh OB,OC,OS đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2\left(O,\left(SBC\right)\right)}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OS^2}$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{19}{12}\Rightarrow d\left(O,\left(SBC\right)\right)=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$\Rightarrow d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$



b) Ta có (SCD) là mặt phẳng chứa SD và song song với AB vì vậy

$$d\left(AB,SD\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(B,\left(SCD\right)\right)$$

Tương tự như câu a) ta có

$d\left(B,\left(SCD\right)\right)=2d\left(O,\left(SCD\right)\right)$ mà

$d\left(O,\left(SCD\right)\right)=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\Rightarrow d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$, hay $d\left(AB,SD\right)=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

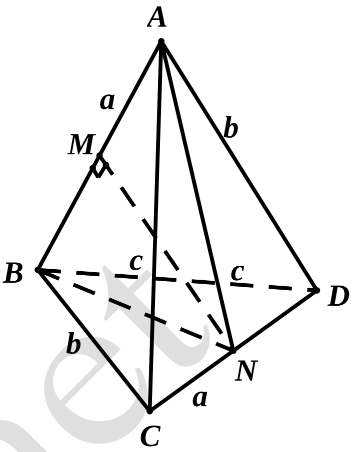
76.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Xét hai tam giác ACD và BCD có CD chung $AC=BD,AD=BC$ nên $\Delta ACD=\Delta BCD$, mà M là trung điểm của AB nên $MN\perp AB$.

Lí luaanj tương tự ta cũng có $MN\perp CD$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD, do đó $d(AB,CD)=MN$.



Ta có $AN^2=\frac{AC^2+AD^2}{2}-\frac{CD^2}{4}=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$MN^2=AN^2-AM^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}-\frac{a^2}{4}$

$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\Rightarrow MN=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$, hay

$d(AB,CD)=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

Tính tương tự ta có :

$d(AD,BC)=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $d(AC,BD)=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$

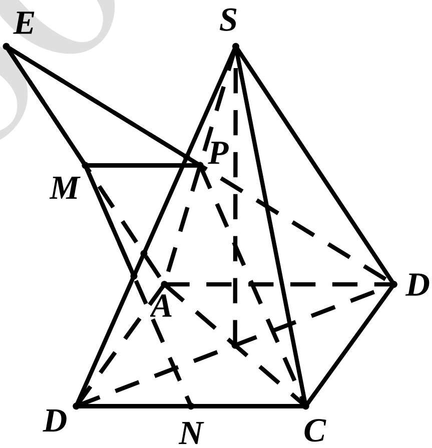
.

77. Gọi P là trung điểm của SA.

Ta có MP là đường trung bình của $\Delta EAD\Rightarrow MP\,//\,AD\Leftrightarrow MP\,//\,BC$.

Do đó $MP\,//\!=NC$ nên $MPCN$ là hình bình hành $\Rightarrow MN\,//\,CP$.

Mặt khác $ABCD$ là hình chóp đều nên dễ dàng chứng minh được $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp CP$.

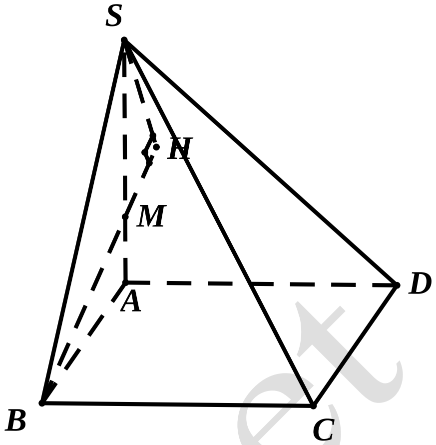


Vậy $\begin{cases}MN\,//\,CP\\BD\perp CP\end{cases}\Rightarrow MN\perp BD$.

Ta có (SAC) là mặt phẳng chứa AC và song song với MN nên $d(MN,AC)=d(N,(SAC))$

$=\frac{1}{2}d(B,(SAC))=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $d(MN,AC)=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.



78. Kẻ $SH \perp BM$. Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SH$$

Lại có $\begin{cases} SH \perp BM \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (MBC)$.

Vậy $d(S,(MBC)) = SH$.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SB,(ABCD))$

$= SBA = 60^0 \Rightarrow SA = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

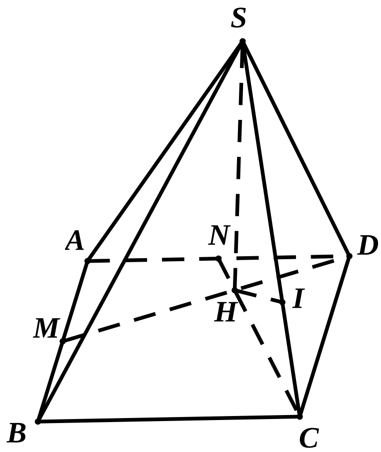
$$MB = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Dễ thấy $\Delta MHS \sim \Delta MAB$ nên

$$\frac{MH}{MA} = \frac{MS}{MB} \Rightarrow HM = \frac{MS.MA}{MB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$BH = BM + MH = \frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$$

Vậy $d(S,(BCM)) = a$.



79. Ta có $\begin{cases} DM \perp CN \\ DM \perp SH \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SCN)$

$\Rightarrow DM \perp SC$. Gọi I là hình chiếu của H trên SC thì HI là đoạn vuông góc chung của SC và DM nên $d(DM,SC) = HI$.

Tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên

$$DH.DM = DN.DA \Rightarrow DH = \frac{DN.DA}{DM}$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{AM^2 + AD^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Ta có $HC^2 = DC^2 - DH^2 = a^2 - \frac{a^2}{5} = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow HC = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Tam giác SCH vuông tại H và có đường cao HI nên $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2}$

$= \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow HI = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Vậy $d\left(DM, SC\right) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

80. Áp dụng định lí cô sin ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = a^2 + 4a^2 - 2.2a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{7}$.

Ta có $BM = \sqrt{BC^2 + MC^2} = 2a\sqrt{3}, A'B = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = a\sqrt{21}$

$A'M = \sqrt{A'C^2 + C'M^2} = 3a$, từ đó ta có $MB^2 + MA'^2 = 21a^2 = A'B^2$ nên tam giác MA'B vuông tại M hay $MB \perp MA'$.Kẻ $BI \perp AC$ tại I.

Gọi $N = A'N \cap AC$, ta có $IA \cap \left(A'BM\right) = N$ nên $\frac{d\left(A,\left(A'BM\right)\right)}{d\left(I,\left(A'BM\right)\right)} = \frac{NA}{NI}$

Ta có $AN = 2AC = 4a$, $AI = AB\cos 60^0 = \frac{a}{2}$ nên $IN = IA + AN = \frac{a}{2} + 4a = \frac{9a}{2}$,

do đó

$\dfrac{d(A,(A'BM))}{d(I,(A'BM))} = \dfrac{4a}{\frac{9a}{2}} = \dfrac{8}{9}$.

Dễ thấy $BI \perp (ACC'A') \Rightarrow BI \perp A'M$

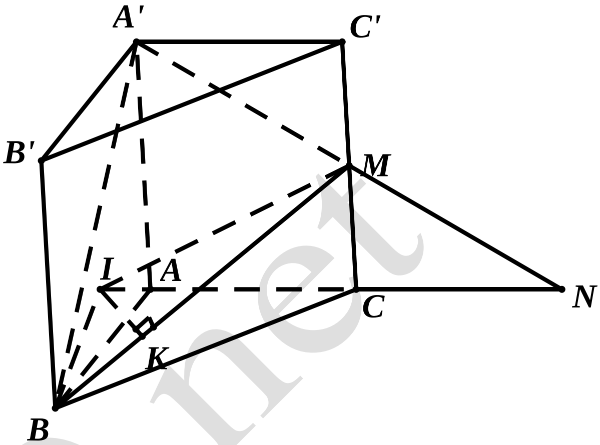
, vậy $\begin{cases} A'M \perp BI \\ A'M \perp MB \end{cases} \Rightarrow A'M \perp (IMB)$

$(IBM) \perp (A'BM) = BM$ nên kẻ

$IK \perp BM$ thì $IK \perp (A'BM)$.

Vậy $d(I,(A'BM)) = IK$.

Ta có

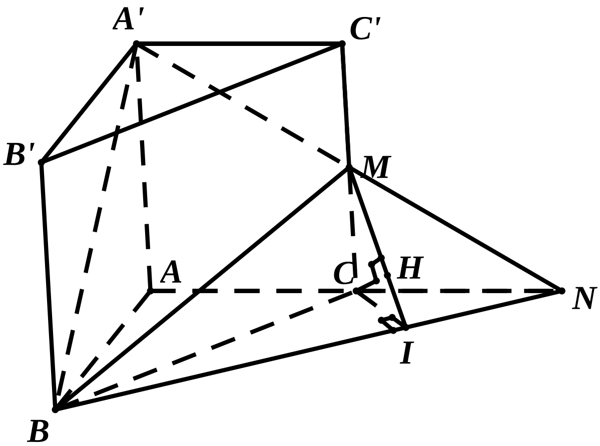


$$IM = \sqrt{IC^2 + CM^2} = \sqrt{\left(\frac{5a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IM^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{45a^2} = \frac{64}{45a^2} \Rightarrow IK = \frac{3a\sqrt{5}}{8}$$

Do đó $d(A,(A'BM)) = \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{3a\sqrt{5}}{8} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

Lưu ý: Có thể sử dụng $\dfrac{d(A,(A'BM))}{d(C,(A'BM))} = \dfrac{NA}{NC}$ dựng như hình vẽ cũng tính được khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.

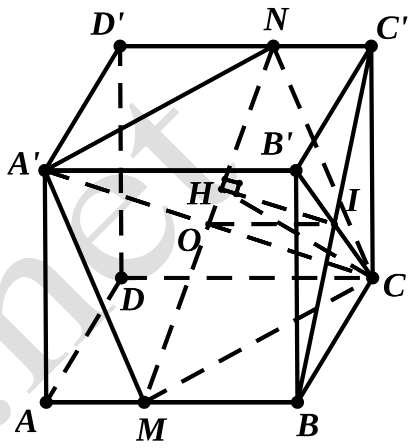


81.

a) Ta có $\begin{cases}(ABB'A')//(CDD'C')\\(A'MB)\cap(ABB')=A'M\\(A'MB)\cap(CDD'C')=CN\end{cases}\Rightarrow A'M//CN$

Tương tự $CM//A'N$, do đó $A'MCN$ là hình bình hành.

Dễ thấy $CB'\perp(ABC'D')$ mà $MN\subset(ABC'D')$ nên $CB'\perp MN$.



b) Gọi O là tâm của hình hộp và I là tâm của mặt bên $BCC'B'$ thì $O\in MN$.

Ta có $\begin{cases}MN\perp CI\\MN\perp CH\end{cases}\Rightarrow MN\perp(CIH)\Rightarrow IH\perp MN$ Trong $(ABC'D')$ đường thẳng MN đi qua điểm O cố định và điểm H nhìn đoạn OI dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn đường kính OI.

Gọi $H_1=AC'\cap(\zeta),H_2=BD'\cap(\zeta)$ với (ζ) là đường tròn đường kính OI trong $(ABC'D')$.

Từ đó ta lập luận được tập hợp các điểm H là cung tròn H_1H_2.

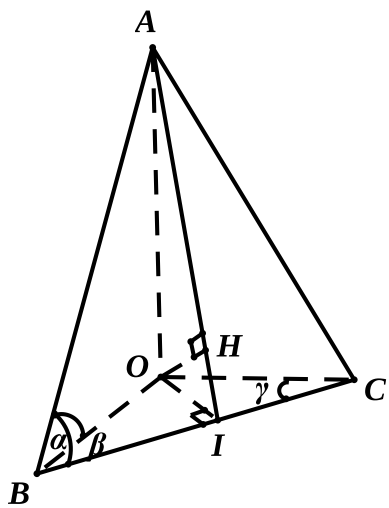
82.

a) Đặt $OB=b,OC=c$ thì $b+c=1$

$S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OAC}$

$=\frac{1}{2}OAOB+\frac{1}{2}OB.OC+\frac{1}{2}OC.AO$

$=\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}bc$



Gọi I là hình chiếu của O trên BC và H là hình chiếu của O trên (ABC).

Ta có $\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

$=\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\Rightarrow OI^2=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$.

Do đó $AI^2=OI^2+OA^2=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}+1=\frac{b^2+c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}=\frac{(b+c)^2-2bc+b^2c^2}{b^2+c^2}$

$=\frac{(1-bc)^2}{b^2+c^2}\Rightarrow AI=\frac{1-bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ (do $0<bc<1$)

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AI.BC=\frac{1}{2}\frac{1-bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\sqrt{b^2+c^2}=\frac{1}{2}(1-bc)$.

Vậy $S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OAC}+S_{ABC}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}(1-bc)=1$ không đổi.

b) Đặt $\alpha=OBA,\beta=ABC,\gamma=OCB$.

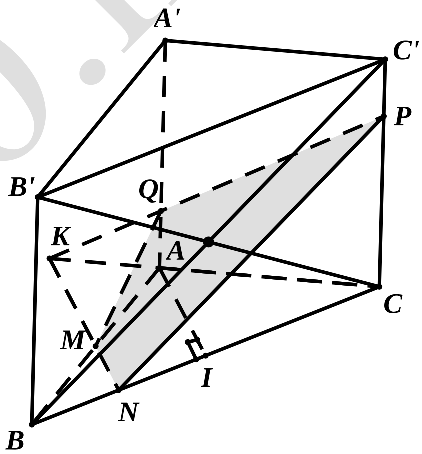
Áp dụng định lí Côsin cho tam giác ABC ta có $\cos\beta=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA.BC}$

$=\frac{OB^2+OC^2+OA^2+OB^2-(OA^2+OC^2)}{2BA.BC}=\frac{OB^2}{BA.BC}$

$=\frac{OB(OA-OC)}{BA.BC}=\frac{OA.OB}{BA.BC}-\frac{OB.OC}{BA.BC}=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=\cos(\alpha+\gamma)$

$\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=180^0$. Vậy $OBA+ABC+OCB=180^0$.

83. Tam giác ABC vuông tại A và $AB=AC=a\Rightarrow BC=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC thì $\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp AA'\end{cases}$



$\Rightarrow BC\perp(AIA')\Rightarrow AI\perp B'C$ (1).

Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $BC'\perp B'C$ (2). Từ (1),(2) suy ra (α) chính là mặt phẳng đi qua M song song với AI và BC'.

Ta có $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(ABC)\\AI\,//\,(\alpha)\\AI\subset(ABC)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=MN\,//\,AI, N\in BC$.

Tương tự $(\alpha)\cap(BCC'B')=NP\,//\,B'C, P\in CC'$.

Gọi $K=AC\cap MN, Q=PK\cap AA'$. Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

$S_{td}=S_{KNP}-S_{KMQ}=S_{KMQ}\left(\frac{S_{KNP}}{S_{KMQ}}-1\right)=S_{KMQ}\left(\frac{KN}{KM}.\frac{KP}{KQ}-1\right)$.

Do M là trung điểm của AB và $KN\,//\,AI$ nên $\frac{KN}{KM}=\frac{KN}{AI}=\frac{CN}{CI}=\frac{3}{2}$.

Tương tự $QA\,//\,CC'\Rightarrow\frac{KP}{KQ}=\frac{KC}{KA}=\frac{NC}{NI}=3$.

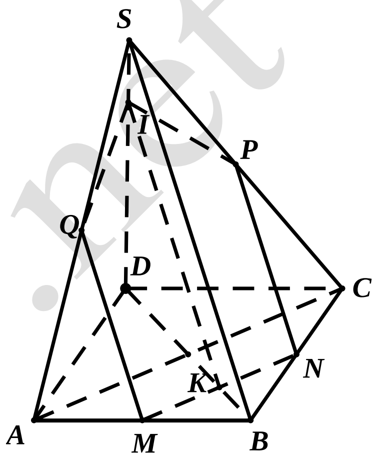
$AQ=\frac{1}{3}NC=\frac{1}{3}\frac{3a\sqrt{2}}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $AK=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}$. Tứ diện $AMKQ$ vuông tại A

nên $S_{KMQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(OM.OK)^2+(OK.OQ)^2+(OQ.OM)^2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$

Từ đó ta có $S_{td}=\frac{7a^2\sqrt{2}}{16}$.

Chú ý: Có thể dùng phép chiếu vuông góc lên mp (ABC) để tính diện tích thiết diện $MNPQ$.

84. Gọi $K=MN\cap BD$.



$$\begin{cases} M\in(\alpha)\cap(SAB) \\ SB\subset(SAB) \\ SB\,//\,(\alpha) \end{cases}$$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=MQ\,//\,SB, Q\in SA$

Tương tự $(\alpha)\cap(SBC)=NP\,//\,SB, P\in SC$

$(\alpha)\cap(SBD)=KI\,//\,SB, I\in SD$. Thiết diện là ngũ giác $MNPIQ$.

Dễ thấy $MKIQ$ và $NKIP$ là hai hình thang vuông có diện tích bằng nhau, do đó

$S_{td}=(MQ+IK)MK$. Ta có $MQ=\frac{1}{2}SB=\frac{b}{2}$,

trong ΔSBD có $\frac{IK}{SB}=\frac{DK}{BD}=\frac{\frac{3}{4}BD}{BD}=\frac{3}{4}\Rightarrow IK=\frac{3}{4}SB=\frac{3b}{4}$,

$MK=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{4}AC=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Từ đó ta có $S_{td}=\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$.

85. a) Do $C'D'\,//\,AB$ nên $(MN,C'D')=(MN,AB)=BMB=45^0$

b) Ta có $AD' // BC'$ nên

$(BD, AD') = (BD, BC') = DBC'$

Dễ thấy tam giác BDC' đều nên

$DBC' = 60^0$.

c) Ta có $MN // AC$ nên

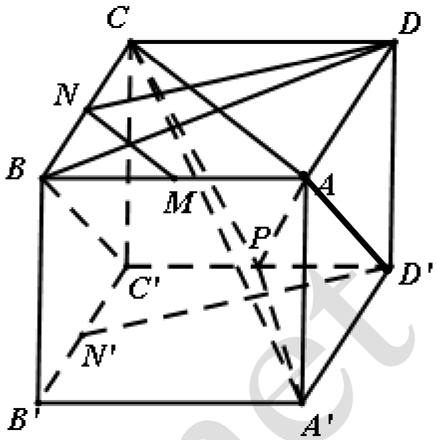
$(MN, AP) = (AC, AP) = CAP$

Dễ thấy

$AC = a\sqrt{2}, CP = \frac{a\sqrt{5}}{2}, Ap = \frac{3a}{2}$

$$\cos CAP = \frac{AC^2 + AP^2 - CP^2}{2AC.AP}$$

Do đó $= \frac{2a^2 + \frac{9a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2.a\sqrt{2}.\frac{3a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\Rightarrow CAP = 45^0$. Vậy $(MN, Ap) = 45^0$.

86. Gọi F là trung điểm của BD

thì $EF // = \frac{1}{2}CD$, do đó

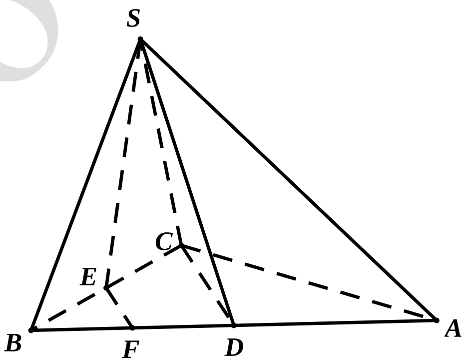
$(CD, SE) = (EF, SE) = SEF$

Ta có

$EF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\left(\frac{AB\sqrt{3}a}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}a}{2}$

Trong tam giác SCE ta có

$SE^2 = SC^2 + CE^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2$

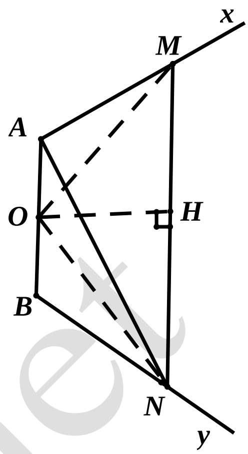


Trong tam giác SCF ta có $SE^2 = SC^2 + CF^2 = SC^2 + CD^2 + DF^2 = \frac{15a^2}{2}$

Do đó $\cos SEF = \frac{SE^2 + EF^2 - SF^2}{2SE.EF} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SEF = 135^0$

$\Rightarrow (CD,SE) = 45^0$.

87. a) Đặt $x = AM, y = BN$ và $AB = a$. Áp dụng định lí cô sin ta có



$$\cos MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM.ON}$$

$$= \frac{x^2 + \frac{a^2}{2} + y^2 + \frac{b^2}{2} - (x+y)^2}{2OM.ON} = \frac{a^2 - 4xy}{2OM.ON}$$

Do $AM \perp AB$ và $BN \perp AM$ nên $AM \perp AN$, do đó

$MN^2 = AM^2 + AN^2 = AM^2 + BN^2 + AB^2$

$\Rightarrow (x+y)^2 = x^2 + y^2 + a^2 \Rightarrow 2xy = a^2$

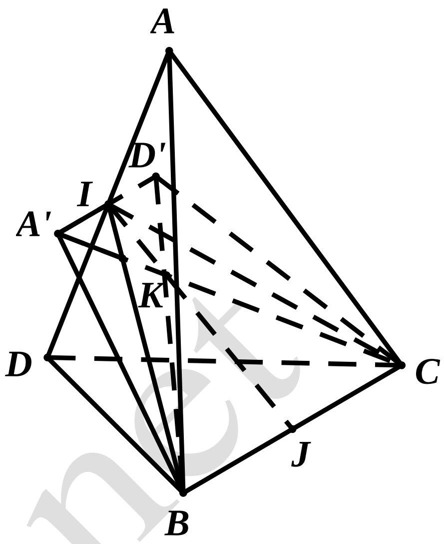
$\Rightarrow \cos MON = \frac{-a^2}{2OM.ON} < 0$. Vậy tam giác MON tù.

b) Kẻ $OH \perp MN, H \in MN$. Ta chứng minh $OH = \frac{AB}{2}$. Thật vậy, giả sử $OH > OA$. Khi đó xét các tam giác MOA, MOH ta có $MH < AM$ và xét các tam giác NOB và NOH ta có $NH < BN$, suy ra $MN < AM + BN$ (mâu thuẫn giả thiết).

Tương tự $OH < OA$ cũng mâu thuẫn giả thiết.

Vậy $OH = OA$, hay $OH = \frac{AB}{2}$ không đổi.

88.



a) Tam giác ABD cân tại B có I là trung điểm của AD nên $BI \perp AD$. Tương tự $CI \perp AD \Rightarrow AD \perp (IBC)$

$\Rightarrow AD \perp IJ$. Do vai trò bình đẳng giữa AD và BC nên $IJ \perp BC$.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của AD và BC.

b) Dựng hình thang $BCD'A'$ sao cho I, J lần lượt là trung điểm của hai đáy $A'D'$, BC và $IA' = IA, ID' = ID$. Ta thấy với điểm M tùy ý trên IJ thì $MA = MA', MD = MD'$ nên

$MA + MB + MC + MD = MA' + MB + MC + MD'$

$= (MA' + MC) + (MD' + MB) \geq A'C + D'B$.

Đẳng thức xảy ra khi $M = A'C \cap D'B$.

Ta có $IJ^2 = DJ^2 - ID^2 = DC^2 - JC^2 - ID^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4}$

$\Rightarrow IJ = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2 - c^2}}{2}$.

$BD'^2 = \left(\frac{BC + A'D'}{2}\right)^2 + IJ^2 = a^2 + \frac{bc}{2} \Rightarrow BD' = \sqrt{a^2 + \frac{bc}{2}}$

Vậy $\min(MA + MB + MC + MD) = 2BD' = \sqrt{4a^2 + 2bc}$

89.

I là trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi T là giao điểm của $A'H$ với $B'C'$, E, F lần lượt là các giao điểm của AB và BC; CI và AB. Dễ thấy D, T, E thẳng hàng (thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (IAD) và (DBC)). Do H là trực tâm của tam giác $A'B'C'$ nên $A'T \perp B'C'$, mặt khác theo giả thiết $DA \perp DB$ và $DA \perp DC$ nên $DA \perp (DBC) \Rightarrow DA \perp B'C'$; do đó $B'C' \perp (DA'T) \Rightarrow B'C' \perp DT$.

Ta có $C'DT + B'DT = 90^0$ và $DB'T + B'DT = 90^0 \Rightarrow C'DT = DB'T$ (1)

Mặt khác tứ giác $BCC'D'$ là tứ giác nội tiếp nên $DB'T = C'CB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tam giác EDC cân tại $E \Rightarrow ED = EC$, mà tam giác DBC vuông tại D suy ra $ED = EC = EB$, thế thì AE là trung tuyến của tam giác ABC.

Tương tự ta cũng chứng minh được CF là trung tuyến của tam giác ABC, vì vậy I là trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh $MN + MP + MQ = 3DI$

Rõ ràng ID cắt các mặt $(DAB),(DBC),(DAC)$ tại D nên đường thẳng qua M cùng phương với ID chắc chắn cắt các mặt $(DAB),(DBC),(DCA)$.

Gọi X,Y,Z lần lượt là các giao điểm của IM với các cạnh AB, AC, BC (Lưu ý là nếu IM song song với một cạnh nào đó của tam giác ABC thì ta vẫn dễ dàng dựng được các giao điểm của đường thẳng Δ với các mặt các mặt phẳng $(DAB),(DBC),(DCA)$)

Ta có N,P,Q theo thứ tự là các giao điểm của DX, DZ, DY với Δ.

Kẻ $MR // IB$, thì $\frac{MN}{ID} = \frac{XM}{XI} = \frac{MR}{IB} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta IBC}} = \frac{3S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$ (do I là trọng tâm của tam giác ABC nên $S_{\Delta IBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$).

Hoàn toàn tương tự ta có

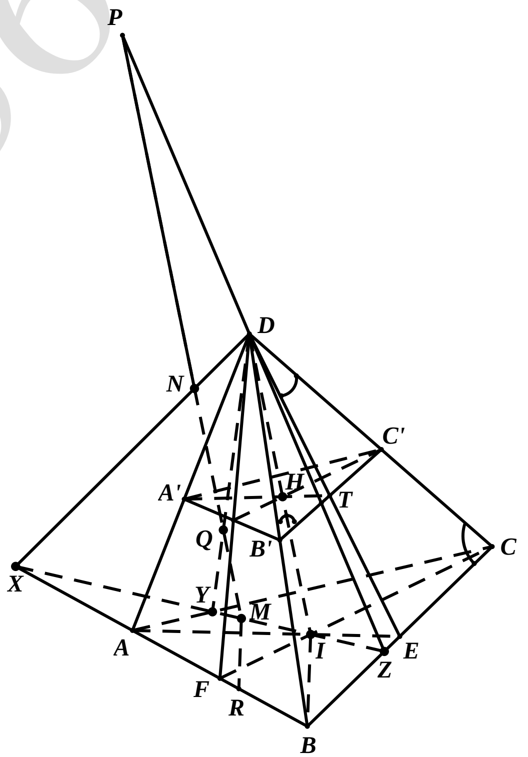
$\frac{MP}{ID} = \frac{3S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}, \frac{MQ}{ID} = \frac{3S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}}$.

Do đó

$$\frac{MN}{ID} + \frac{MP}{ID} + \frac{MQ}{ID}$$
$$= \frac{3S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{3S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{3S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}} = 3$$
$$\Leftrightarrow MN + MP + MQ = 3DI$$

Theo BĐT Cau chy ta có

$$T = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}$$
$$\geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ}\right)^2$$



$\geq \frac{1}{3}.\frac{81}{(MN+MP+MQ)^2}=\frac{27}{(3DI)^2}=\frac{3}{DI^2}$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I$ (khi đó $N,P,Q \equiv D$)

Vậy $\min T=\frac{3}{DI^2}$ khi M trùng với trọng tâm của tam giác.