# Đáp án chuyên đề:
# Đường thẳng và mặt phẳng song song - Hình học 11

**31.**

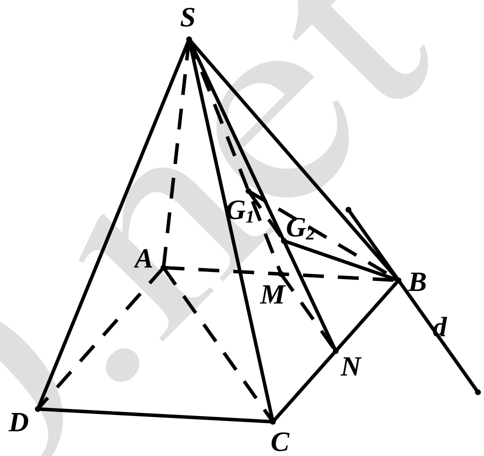
a) Ta có $\begin{cases} MN \parallel AC \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SAC)$.

b) $G_1, G_2$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $SAB$ và $SBC$ nên

$\dfrac{SG_1}{SM} = \dfrac{SG_2}{SN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel MN$ mà

$MN \parallel AC \Rightarrow G_1G_2 \parallel AC$.

Vậy $\begin{cases} G_1G_2 \parallel AC \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (SAC)$.




c) Ta có $\begin{cases} B \in (ABC) \cap (BG_1G_2) \\ NM \subset (ABC) \\ G_1G_2 \subset (BG1G_2) \\ MN \parallel G_1G_2 \end{cases}$

$\Rightarrow (ABC) \cap (BG_1G_2) = d \parallel MN \parallel G_1G_2, B \in d$.

**32.** a) Ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} \Rightarrow MN \parallel AB$

Vậy $\begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.

b) Tương tự $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{PD}{AD} \Rightarrow SD \parallel MP$

mà $MP \subset (MNP) \Rightarrow SD / (MNP)$.

c) Kẻ $NR \parallel BC, R \in SC$, kẻ $RQ \parallel SB, Q \in BC$ thì ta có

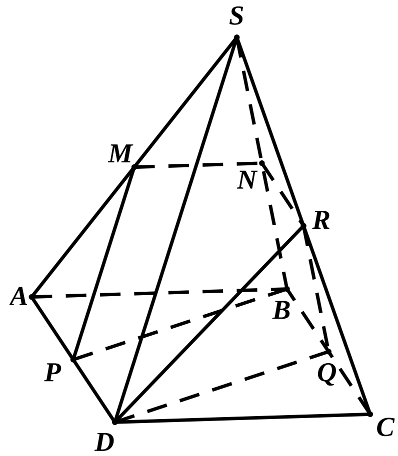
$\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SR}{SC}$ $(1)$ và $\dfrac{SR}{SC} = \dfrac{BQ}{BC}$ $(2)$,

mặt khác $\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{PD}{AD}$ $(3)$.

Từ $(1),(2),(3)$ ta có

$\dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{PD}{AD} \Rightarrow BQ = PD$.

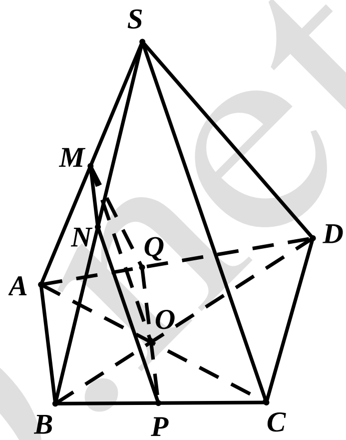
Lại có $NR = BQ \Rightarrow NR = PD$



Thêm nữa $\begin{cases} NR // BQ \\ PD // BQ \end{cases} \Rightarrow NR // PD$ nên $PDRN$ là hình bình hành, từ đó ta có

$\begin{cases} NP // DR \\ DR \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow DR // (SCD)$.

**33.** Gọi $(P)$ là mặt phẳng qua $O$ và song song với $AB$ và $SC$




Ta có $\begin{cases} O \in (P) \cap (SAC) \\ SC \subset (SAC) \\ SC // (P) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (P) = OM // SC, O \in SA$.

Tương tự

$\begin{cases} N \in (SAB) \cap (P) \\ AB \subset (SAB) \\ AB // (P) \end{cases}$

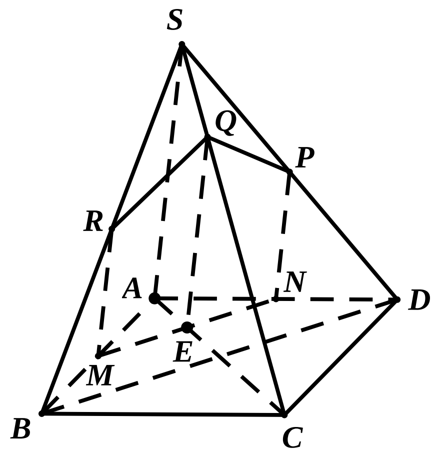
$\Rightarrow (SAB) \cap (P) = MN // AB, N \in SB$.

$\begin{cases} N \in (P) \cap (SBC) \\ SC \subset (SBC) \\ SC // (P) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (P) = NP // SC,$

$P \in BC$.

Trong $(ABCD)$ gọi $Q = PO \cap AD$ thì thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

**34.** Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // BD \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$




$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN // BD, N \in AD$

Tương tự $(\alpha) \cap (SAD) = NP // SA, P \in SD$

$(\alpha) \cap (SAB) = MR // SA, R \in SB$

Gọi $E = MN \cap AC$ thì $(\alpha) \cap (SAC) = EQ // SA, Q \in SC$

Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

**35.** Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SBC) \\ SC \subset (SBC) \\ SC \,//\, (\alpha) \end{cases}$

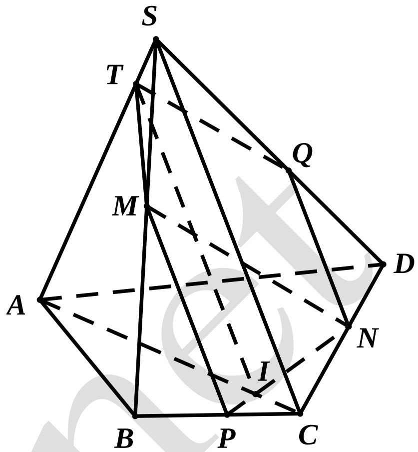
$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = MP \,//\, SC, P \in BC$.

Tương tự $(\alpha) \cap (SCD) = NQ \,//\, SC, Q \in SD$

Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap PN$ thì

$(\alpha) \cap (SAC) = IT \,//\, SC, T \in SA$

Thiết diện là ngũ giác $MPNQT$.




**36.**

a) Gọi $I = AO \cap BC, J = AO' \cap BD$ ta có

$(AOO') \cap (BCD) = IJ$ do đó

$OO' \,//\, (BCD) \Leftrightarrow OO' \,//\, IJ$

$\Leftrightarrow \frac{OA}{OI} = \frac{O'A}{O'J}$ $(1)$.

Mặt khác ta có $\frac{OA}{OI} = \frac{AB}{BI}$ $(2)$

$\frac{O'A}{O'J} = \frac{AB}{BJ}$ $(3)$. Từ $(1),(2),(3)$ suy ra

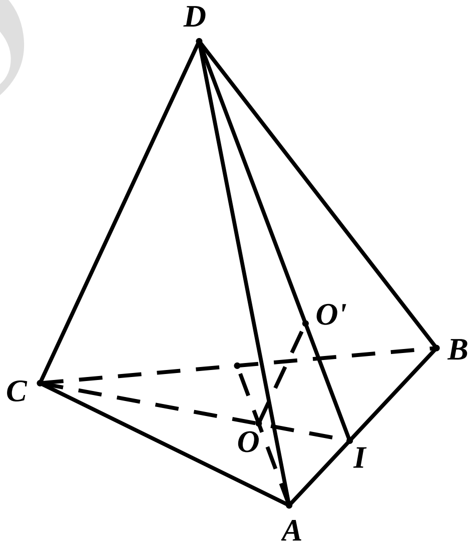
$BI = BJ$.

Lại có $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{IB}{BC} = \frac{AB}{AB + AC}$

và $\frac{JB}{JD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{JB}{BD} = \frac{AB}{AB + AD}$

nên $IB = JB \Leftrightarrow \frac{AB.BC}{AB + AC} = \frac{AB.BD}{AB + AD}$

$\Leftrightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB + AC}{AB + AD}$ $(1)$.




b) Trường hợp $OO' \,//\, (BCD)$ và

$OO' \,//\, (ACD)$ thì ta có

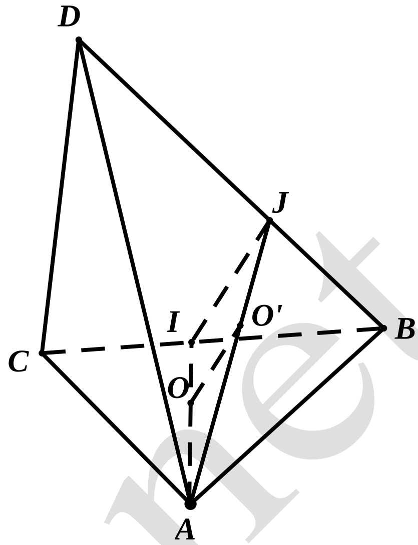
$\begin{cases} (BCD) \cap (ACD) = CD \\ OO' \,//\, (BCD) \\ OO' \,//\, (ACD) \end{cases} \Rightarrow OO' \,//\, CD$.

Vì vậy $OO'$ và $CD$ đồng phẳng.

Xét ba mặt phẳng $(ABC),(ABD),(CDOO')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là $AB, CO, DO'$ nên ba giao tuyến này đồng quy.Gọi $I$ là điểm đồng quy này thì $I$ là chân các đường phân giác của các góc $C, D$ trong các tam giác $CAB, DAB$ tương ứng.Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{IA}{IB}=\frac{DA}{DB}$ và $\frac{IA}{IB}=\frac{CA}{CB}$

suy ra $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}$ $(2)$

Kết hợp với đẳng thức $(1)$ ta có




$\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}=\frac{AC}{AD}=\frac{AB+AC-AC}{AB+AD-AD}=\frac{AB}{AB}=1$ ( Tính chất dãy tỉ số bằng nhau).

Vậy $BC=BD, AC=AD$.

**37.** a) Gọi $O=AC\cap BD, I=SO\cap AM$.

Ta có $\begin{cases} BD // (\alpha) \\ BD\subset(SBD) \\ I\in(\alpha)\cap(SBD) \end{cases} \Rightarrow(\alpha)\cap(SBD)=EF // BD, E\in SB, F\in SD, I\in EF$

Thiết diện là tứ giác $AEMF$.

b) Do $O, M$ lần lượt là trung điểm của $AC, SC$ nên $I$ là trọng tâm của tam giác $SAC \Rightarrow\frac{IS}{IO}=\frac{2}{3}$, mặt khác

$EF // BD$ nên

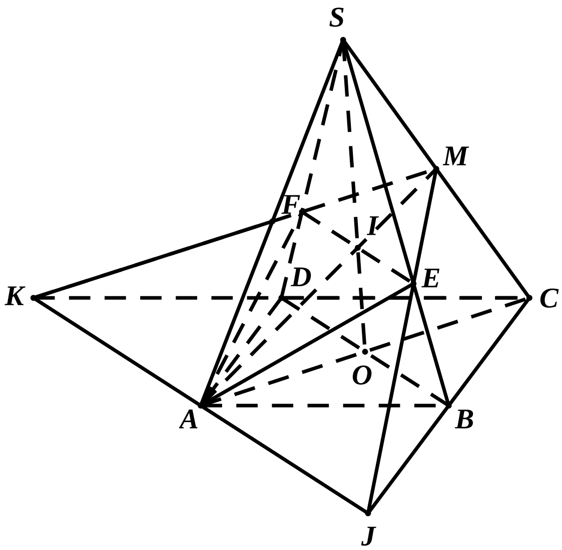
$\frac{SE}{SB}=\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$.

Từ đó ta có

$\frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SE}{SB}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Và $\frac{S_{\Delta SMF}}{S_{\Delta SCD}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SF}{SD}=\frac{1}{3}$.

c) Dễ thấy $K, A, J$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(\alpha)$ nên



chúng thẳng hàng . Gọi $d=(\alpha)\cap(ABCD)$ thì $\begin{cases} BD // (\alpha) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow d // BD$, mà

$BD // EF \Rightarrow d // EF$.

Vậy $K, A, J$ thuộc đường thẳng $d$ song song với $EF$.

**38.**

a)

Ta có $\begin{cases} M \in (ABM)\cap(SCD) \\ AB // (SCD) \\ AB \cap (ABM) \end{cases} \Rightarrow (ABM)\cap(SCD) = IJ // AB // CD,$

$M \in IJ, I \in SD, J \in SC$.

Gọi $E = SN \cap AB, F = SM \cap CD \Rightarrow EF = (SMN)\cap(ABCD)$.

b) Do $M, N$ là trọng tâm của các tam giác $SCD$ và $SAB$ nên

$\frac{SM}{SF} = \frac{2}{3}, \frac{SN}{SE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SF} = \frac{SN}{SE} \Rightarrow MN // EF$, $EF \subset (ABCD) \Rightarrow MN // (ABCD)$.

c) Ta có $IJ // CD \Rightarrow \frac{SI}{SD} = \frac{SM}{SF} = \frac{SN}{SE}$

$\Rightarrow IN // DE$, $DE \subset (ABC)$

$\Rightarrow MN // (ABCD)$.

d) Gọi $\Delta = (SAB)\cap(SCD)$

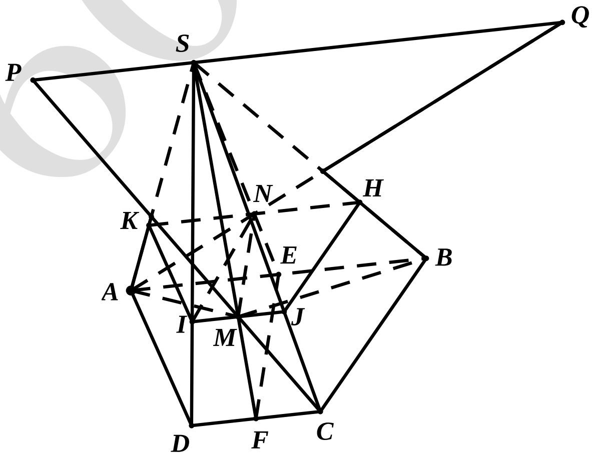
$P = CM \cap \Delta \Rightarrow \begin{cases} P \in \Delta \subset (SAB) \\ P \in CM \end{cases}$

$\Rightarrow P = CM \cap (SAB)$.

Tương tự gọi $Q = AN \cap \Delta$ thì

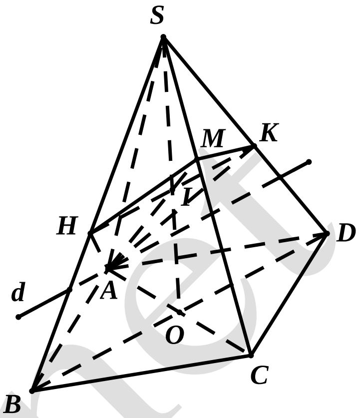
$Q = AN \cap (SCD)$.

Ta có $S, P, Q$ thuộc $\Delta$ nên chúng thẳng hàng.




**39.** a) Trong $(ABCD)$ gọi $d$ là đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BD$ thì $d$ cố định

Ta có $\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in d \\ d \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha)$. Vậy $(\alpha)$ luôn chứa đường thẳng $d$ cố định.




b) Gọi $I = AM \cap HK$, thế thì $\frac{SB}{SH} = \frac{SD}{SK} = \frac{SO}{SI}$ nên

$\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} = \frac{2SO}{SI} \quad (1)$.

Gọi $N$ là trung điểm của $MC$, ta có

$\frac{SC}{SM} = \frac{SN+NC}{SM} = \frac{SN}{SM} + \frac{NC}{SM}$
$= \frac{SN}{SM} + \frac{SN-SM}{SM}$ $= 2\frac{SN}{SM} - 1 = 2\frac{SO}{SI} - 1 \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ ta có $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM} = 2\frac{SO}{SI} - \left(2\frac{SO}{SI} - 1\right) = 1$.

c) Xét các mặt phẳng $(\alpha),(SAB),(SCD)$ ta thấy

$(\alpha) \cap (SAB) = AH, (\alpha) \cap (SCD) = MK,$

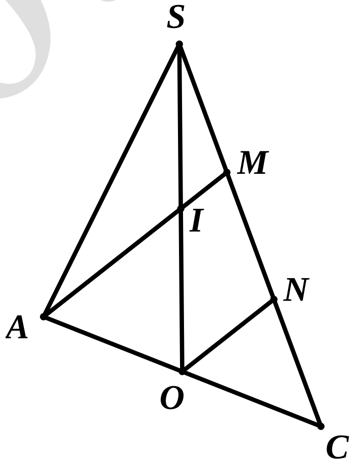
$(SAB) \cap (SCD) = d \,//\, AB \,//\, CD$.

Do đó nếu $AH \,//\, MK \Rightarrow AH \,//\, MK \,//\, d$

$\Rightarrow AH \,//\, AH$ ( vô lí).

Tương tự , Nếu $AK \,//\, MH$ cũng dẫn đến vô lí.

Vậy thiết diện không thể là hình thang.

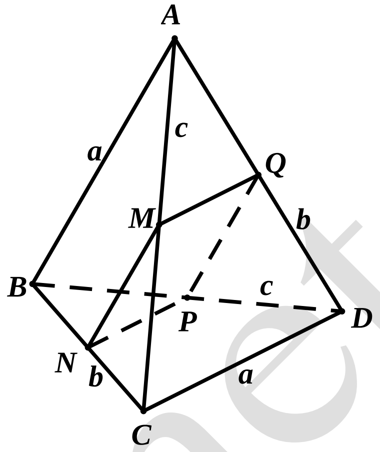



**40.** Giả sử $(\alpha)$ cắt các cạnh $AC, CB, BD, DA$ theo thứ tự tại $M, N, P, Q$ thì $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $MN \,//\, AB \,//\, PQ$ và $MQ \,//\, CD \,//\, NP$

Do đó $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow MN = \frac{CN.AB}{CB} = \frac{a}{b}CN$

Tương tự $\frac{NP}{CD}=\frac{BN}{BC}\Rightarrow NP=\frac{CD.BN}{BC}=\frac{a}{b}BN$.




Để MNPQ là hình thoi ta phải có $MN=NP\Rightarrow CN=BN$ hay $N$ là trung điểm của $BC$. Từ đó ta suy ra được $M,P,Q$ cũng là trung điểm của các cạnh $AC,BD,AD$.

Ta có $BM^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$.

Tương tự $DM^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$

$\Rightarrow BM=DM\Rightarrow MP\perp DB$, do đó

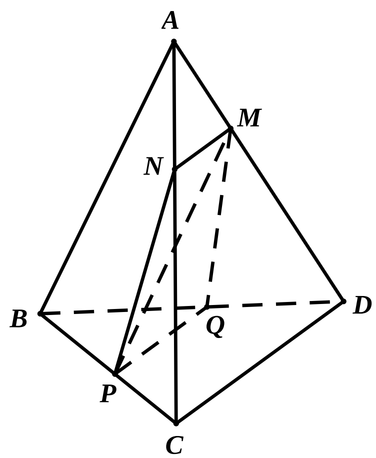
$$MP^2=BM^2-BP^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}-\frac{c^2}{4}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

Tương tự ta tính được $NQ^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ}=MP.NQ=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$

**41.** a) Ta có $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(ACD)\\CD\subset(ACD)\\CD\,//\,(\alpha)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ACD)=MN\,//\,CD,N\in AC$

Tương tự $(\alpha)\cap(BCD)=PQ\,//\,CD,Q\in BD$.




Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Vì $\begin{cases}MN\,//\,CD\\PQ\,//\,CD\end{cases}\Rightarrow MN\,//\,PQ$ nên $MNPQ$ là hình thang.

Dễ thấy $DQ=CP=x$, $DM=a-x$, Áp dụng định lí cô sin cho tam giác $DMQ$ ta có

$MQ^2=DM^2+DQ^2-2DM.DQ\cos 60^0$

$\Rightarrow MQ^2=x^2+\left(a-x\right)^2-2x\left(a-x\right)\frac{1}{2}$

$=3x^2-3ax+a^2\Rightarrow MQ=\sqrt{3x^2-3ax+a^2}$.

Tương tự ta cũng tính được

$NP=\sqrt{3x^2-3ax+a^2}\Rightarrow MP=NQ$.

Vậy $MNPQ$ là hình thăng cân. Dễ thấy $MN=x,PQ=a-x$, đường cao hình thang $h=\frac{1}{2}\sqrt{8x^2-8ax+3a^2}$.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}[a+(a-x)].\frac{1}{2}\sqrt{8x^2-8ax+3a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{8x^2-8ax+3a^2}$.

b) Ta có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{8x^2-8ax+3a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{8\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a^2} \ge \frac{a^2}{2}$

Vậy $\min S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

**42.**

a) Ta có $\begin{cases} AB\,//\,CD \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB\,//\,(SCD)$.

Do đó $\begin{cases} AB\,//\,(SCD) \\ AB \subset (\alpha) \\ (\alpha)\cap(SCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN\,//\,AB$, hay $ABMN$ là hình thang.

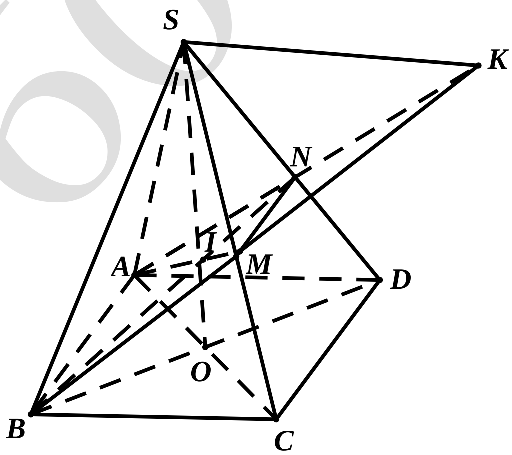
b) Ta có $I = AM \cap BN \Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (SBD) \end{cases}$.

Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow SO = (SAC)\cap(SBD)$, thế thì

$I \in SO$ cố định.

c) Lập luận tương tự câu b) ta được $K$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAD)$ và $(SBC)$.

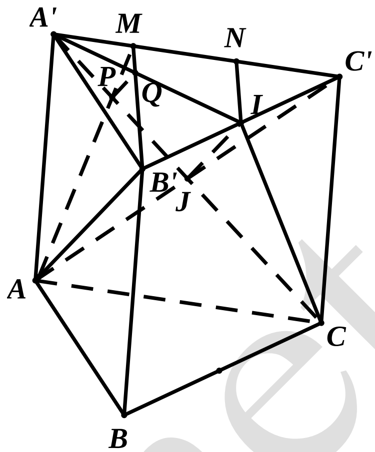



Vì $MN//AB \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BM}{MK}$

Tương tự $SK\,//\,BC \Rightarrow \frac{BC}{SK} = \frac{MB}{MK}$

suy ra $\frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK} = 0$ không đổi.

**43.** a) Gọi $J = AC' \cap A'C$ thì $IJ$ là đường trung bình của tam giác $C'B'A$ nên $IJ\,//\,AB'$.




Vậy $\begin{cases} IJ \subset (A'IC) \\ AB' // IJ \end{cases} \Rightarrow AB' // (A'IC)$.

b) Ta có $\begin{cases} AB' // (A'IC) \\ AB' \subset (MA'B) \\ (MA'B) \cap (A'IC) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ // A'B$.

Đặt $\frac{A'M}{A'C'} = x \ (0 < x < 1)$.

Ta có $\frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{A'P.A'Q}{A'C.A'I}$

Do $A'M // AC$ nên $\frac{A'P}{A'C} = \frac{A'M}{AC} = x$. Gọi $N$ là trung điểm của $AC'$ thì ta có $\frac{A'Q}{A'I} = \frac{A'M}{A'N} = \frac{A'M}{A'C' - NC'} = \frac{A'M}{A'C' - \frac{1}{2}C'M}$

$$= \frac{A'M}{A'C' - \frac{1}{2}(A'C' - A'M)} = \frac{2A'M}{A'C' + A'M} = \frac{2\frac{A'M}{A'C'}}{1 + \frac{A'M}{A'C'}} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{2x^2}{1+x}.$$

Do đó $\frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{1+x} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 9x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{37}}{18}$.

Vậy để $S_{\Delta A'PQ} = \frac{2}{9} S_{\Delta A'CI}$ thì $M$ nằm trên $A'C'$ sao cho $A'M = \frac{1+\sqrt{37}}{18} A'C'$.

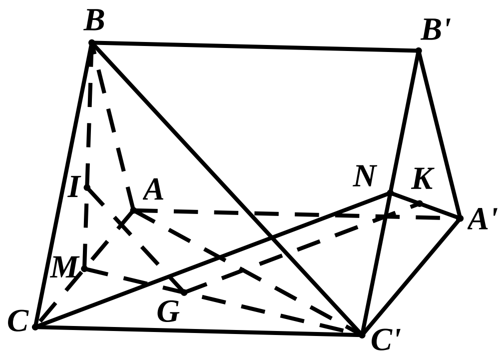
**44.**

a) Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $AC$ thì $\frac{IM}{IB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{MG}{MC'} = \frac{1}{3}$.

Do đó $\frac{IM}{IB} = \frac{MG}{MC'} \Rightarrow IG // BC'$

Vậy $IG // BC' \subset (ABC')$

$\Rightarrow IG // (ABC')$.




b)

Dễ thấy $C, G, A'$ thẳng hàng và

$AC // A'C' \Rightarrow \frac{A'G}{GC} = \frac{C'G}{GM} = 2$

Gọi $N$ là trung điểm của $B'C'$

Ta có $K$ là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$ nên

$\frac{A'K}{A'N} = 2 \Rightarrow \frac{A'G}{GC} = \frac{A'K}{A'N} \Rightarrow GK // CN$.

Vậy $GK // CN \subset (BCC'B') \Rightarrow GK // (BCC'B')$.

**45.** a) Ta có $\begin{cases} I \in (IJM) \cap (ABC) \\ AB \subset (ABC) \\ AB // (IJM) \end{cases}$

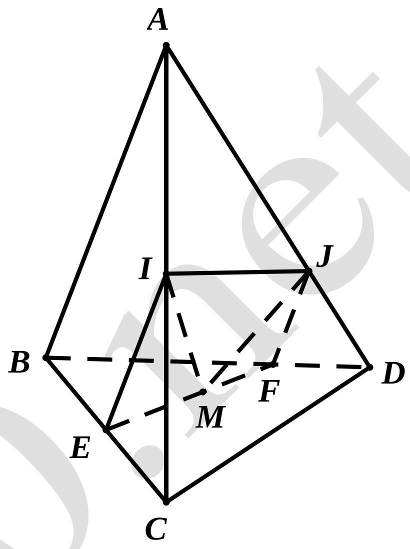
$\Rightarrow (IJM) \cap (ABC) = IE // AB, E \in BC$.

Tương tự $(IJM) \cap (ABD) = JF // AB, F \in BD$

Từ đó ta thấy $EF = (MIJ) \cap (BCD)$ mà

$M \in (MIJ) \cap (BCD) \Rightarrow M \in EF$.

Vậy tập hợp điểm $M$ là đoạn $EF$.




b) Do $\begin{cases} IE // AB \\ JF // AB \end{cases}$ nên thiết diện $IEFJ$ là hình thang.

Dễ thấy $JF = \frac{a}{3}, IE = \frac{a}{2}$. Áp dụng định lí

Côsin ta có $IJ^2 = AI^2 + AJ^2 - 2AIAJ\cos 60^0$

$= \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - 2.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{1}{2} = \frac{13a^2}{36}$.

Tương tự ta cũng có $IE^2 = \frac{13a^2}{36}$, do đó $IEFJ$ là hình thang cân và không khó khăn gì ta có thể tính được diện tích thiết diện là $S = \frac{a^2 5\sqrt{51}}{144}$.