Đáp án chuyên đề:
Đại cương về mặt phẳng và đường thẳng - Hình học 11

1. a) Ta có M, N lần lượt là điểm chung của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD) nên $(MBC) \cap (NAD) = MN$.

b)

Gọi $I = BM \cap DE \Rightarrow \begin{cases} I \in BM \subset (BCM) \\ I \in DE \subset (DEF) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (BCM) \cap (DEF)$.

Tương tự, gọi $J = CM \cap DF$ thì

$\Rightarrow J \in (BCM) \cap (DEF)$.

Do đó $IJ = (BCM) \cap (DEF)$.

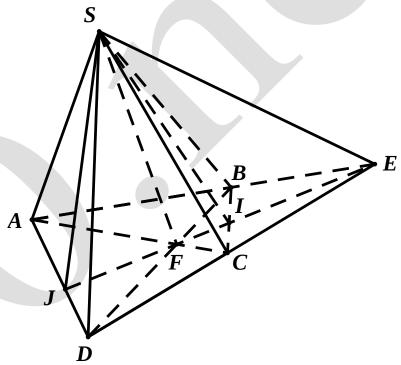
2.

a)Ta có $(SAB) \cap (SCD) = SE$,

$(SAC) \cap (SBD) = SF$.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của EF với BC, AD thì

$(SEF) \cap (SAD) = SJ$, $(SEF) \cap (SBC) = SI$.

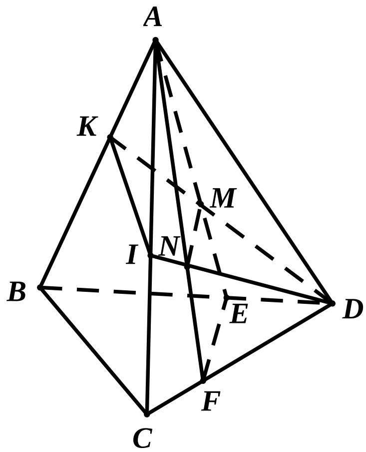


3.

a) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AM, AN với BD và CD thì $EF = (AMN) \cap (BCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là giao điểm của DN, DM với AC và AB thì

$EF = (DMN) \cap (ABC)$.



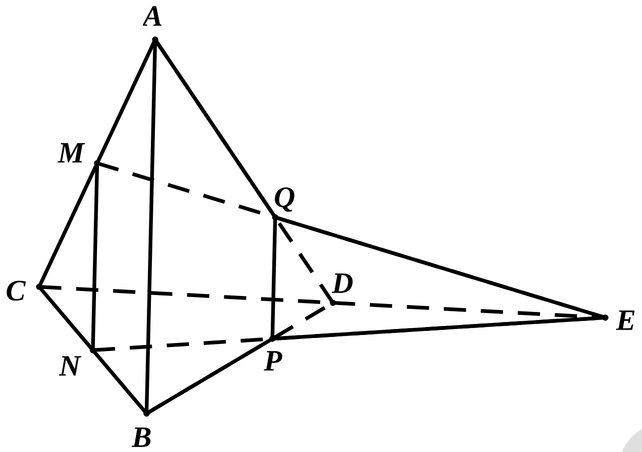
4.

a) Trong (BCD) gọi $E = CD \cap NP$ thì

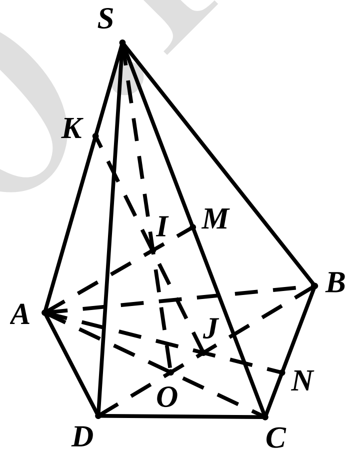
$\begin{cases} E \in CD \\ E \in NP \subset (MNP) \end{cases}$

$\Rightarrow E = CD \cap (MNP)$.

b) Trong (ACD) gọi $Q = AD \cap ME$ thì ta có $(MNP) \cap (ABD) = PQ$



5.



a) Trong $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$, trong (SAC) gọi $I = AM \cap SO$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AM \cap (SBC).$$

b) Trong $(ABCD)$ gọi $J = AN \cap BD$, kéo dài IJ cắt SD tại K.

Ta có $\begin{cases} K \in SD \\ K \in IJ \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow K = SD \cap (AMN)$.

6. a) Gọi $E = AB \cap (\alpha)$ thì E cố định và

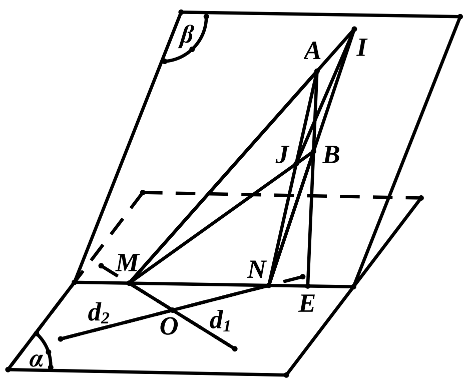
$$\begin{cases} E \in AB \subset (\beta) \\ E \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow E \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta) \ (1)$$

Tương tự

$$\begin{cases} M = d_1 \cap (\beta) \\ d_1 \subset (\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta) (2).$$

$$\begin{cases} N = d_1 \cap (\beta) \\ d_1 \subset (\alpha) \end{cases}$$



$\Rightarrow N \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta)$ (3). Từ $(1),(2),(3)$ suy ra M,N,E thẳng hàng hay MN đi qua điểm E cố định.

b) Ta có $I = AM \cap BN \Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset mp(A,d_1) \\ I \in BN \subset mp(B,d_2) \end{cases} \Rightarrow I \in \Delta' = mp(A,d_1) \cap mp(B,d_2)$

rõ ràng $mp(A,d_1), mp(B,d_2)$ là các mặt phẳng cố định nên Δ' cố định.

Vậy I luôn thuộc đường thẳng cố định Δ'.

c) Lập luận tương tự câu b) ta có $J \in \Delta'' = mp(A,d_2) \cap mp(B,d_1)$.

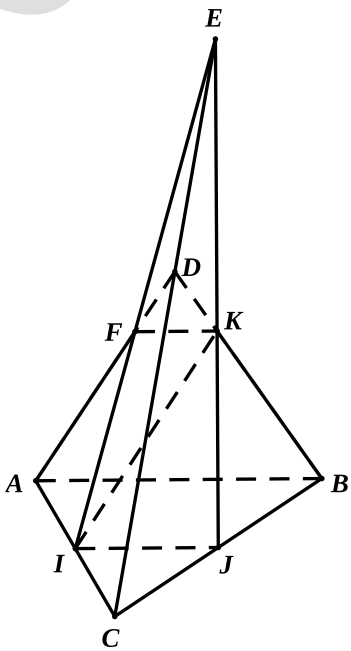
d) Gọi (δ) là mặt phẳng xác định bởi Δ', Δ'' thì (δ) cố định

Gọi $F = AB \cap (\delta)$. Gọi $K = AB \cap (\delta) \Rightarrow K$ cố định

Dễ thấy I,J là điểm chung của các mặt phẳng $(A,d_1),(B,d_2)$ và $(A,d_2),(B,d_1)$ nên I,J thuộc $mp(\Delta', \Delta'')$. Vậy I,J,K thẳng hàng do đó IJ đi qua điểm K cố định.

7. a) Trong (BCD) gọi $E = JK \cap CD \Rightarrow \begin{cases} E \in CD \\ E \in (IJK) \end{cases}$

$\Rightarrow E = CD \cap (IJK)$.



Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác BCD đối với cát tuyến EKJ ta có

$\dfrac{KD}{KB} \cdot \dfrac{JB}{JC} \cdot \dfrac{EC}{ED} = 1$ mà $\dfrac{KD}{KB} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{JB}{JC} = 1$, do đó

$\dfrac{EC}{ED} = 2$. Hay $DE = DC$.

b) Trong (ACD) gọi

$F = AD \cap IE \Rightarrow \begin{cases} F \in AD \\ F \in IE \subset (IJK) \end{cases}$

$F = AD \cap (IJK)$.

Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác ACD đối với cát tuyến EFI ta có

$\dfrac{EC}{ED} \cdot \dfrac{FD}{FA} \cdot \dfrac{IA}{IC} = 1$, mà $\dfrac{EC}{ED} = 2$ (câu a)

$\dfrac{IA}{IC} = 1$ suy ra $\dfrac{FD}{FA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow FA = 2FD$.

c) Do $\dfrac{FD}{FA} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{KD}{KB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{FD}{FA} = \dfrac{KD}{KB} \Rightarrow FK \,//\, AB$

.

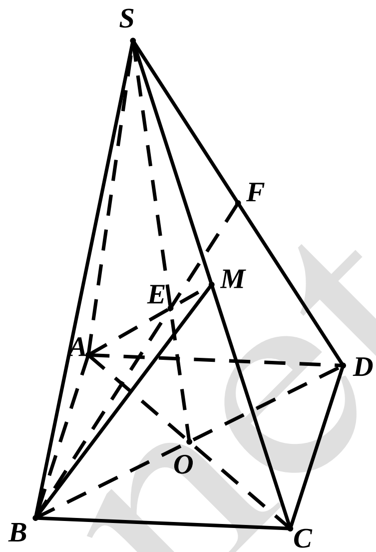
8. a) Gọi $O = AC \cap BD$, trong (SAC) gọi

$E = AM \cap SO \Rightarrow \begin{cases} E \in AM \\ E \in SO \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow E = AM \cap (SBD)$.

Do O, M lần lượt là trung điểm của AC và SC nên E là trọng tâm của tam giác SAC do đó $\frac{EM}{EA} = \frac{1}{2}$.

b) Trong (SBD) gọi



$F = BE \cap SD \Rightarrow \begin{cases} F \in SD \\ F \in BE \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow F = SD \cap (ABM)$.

Vì SO là trung tuyến của tam giác SBD và $\frac{SE}{SO} = \frac{2}{3}$ (do E là trọng tâm của tam giác SAC) nên E là trọng tâm của tam giác SBD, do đó F là trung điểm của SD.

9. a) Gọi E là trung điểm của AD và $I = MG \cap BE$ $\Rightarrow \begin{cases} I \in MG \\ I \in BE \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I = GM \cap (ABCD)$.

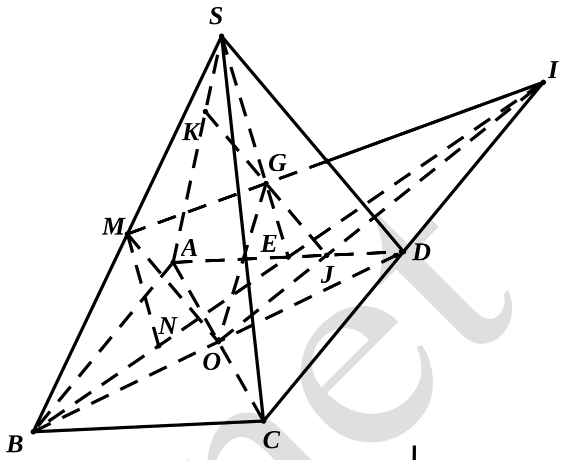
Gọi N là trung điểm của BE thì $MN // = \frac{1}{2} SE$.

Ta có $\frac{IG}{IM} = \frac{GE}{MN} = \frac{\frac{1}{3}SE}{\frac{1}{2}SE} = \frac{2}{3}$, mà IM là trung tuyến của ΔSBI nên G là trọng tâm của $\Delta SBI \Rightarrow E$ là trung điểm của BI, do đó $ABDI$ là hình bình hành $DI // AB$, mặt khác $CD // AB$. Vậy I, C, D thẳng hàng, hay $I \in CD$ và $IC = 2ID$.

b)

Trong $(ABCD)$ gọi $J = AD \cap OI$ thì J chính là giao điểm của AD với (OMG).

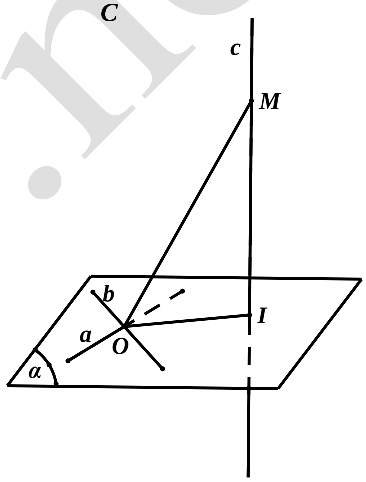
Dễ thấy rằng J là trọng tâm của tam giác IAC nên $\frac{JA}{JD} = 2$.



c) Trong (SAD) gọi $K = JG \cap SA$ thì K là giao điểm của (OMG) với SA

Ta có J là trọng tâm tam giác IBD nên $\frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3} = \frac{EG}{ES} \Rightarrow JG \,//\, SD$ từ đó ta có $\frac{KS}{KA} = \frac{JD}{JA} = \frac{1}{2}$.

10.



a) Ta có $I = c \cap (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} I \in c \subset mp(O,c) \\ I \in (\alpha) \end{cases}$

Lại có

$O \in (\alpha) \cap mp(O,c) \Rightarrow OI = (\alpha) \cap mp(O,c)$.

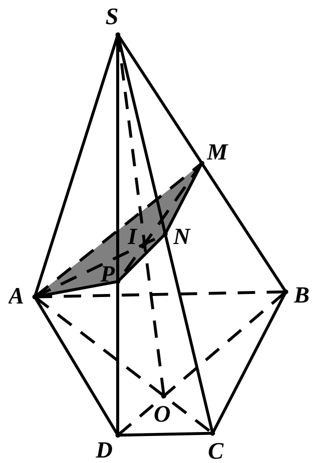
b) Do $O = a \cap b \Rightarrow \begin{cases} O \in a \subset mp(M,a) \\ O \in b \subset mp(M,b) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in mp(M,a) \cap mp(M,b)$.

Vậy $OM = mp(M,a) \cap mp(M,b)$, rõ ràng $OM \subset mp(O,c)$ cố định.

11. a) Gọi $O = AC \cap BD$, trong (SAC) gọi $I = SO \cap AN$, trong (SBD) gọi $P = MI \cap SD$ thì $P = SD \cap (AMN)$.

b) Thiết diện là tứ giác $AMNP$.



12. a) Trong (α) gọi $K = IJ \cap MN$

Ta chứng minh S, O, K thẳng hàng.

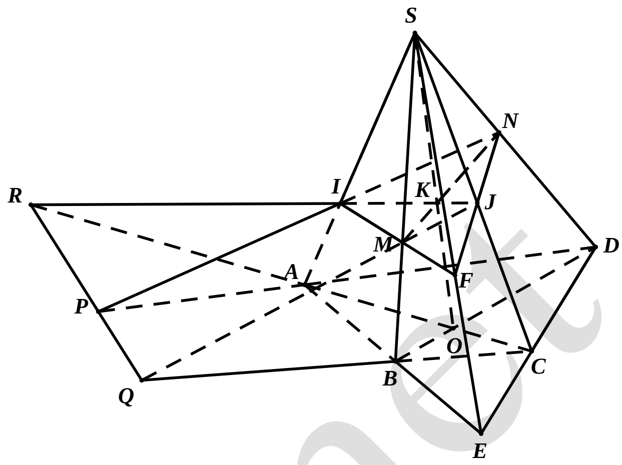
$K = IJ \cap MN$

Thật vậy $\Rightarrow \begin{cases} K \in IJ \subset (SAC) \\ K \in MN \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$.

Mà $SO = (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow K \in SO$

Vậy SO, IJ, MN đồng qiu tại K.



$E = AB \cap CD$

b) Ta có $\Rightarrow \begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$

Tương tự $F \in (SAB) \cap (SCD)$, do đó S, E, F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) nên chúng thẳng hàng.

c) Do IJ không song song với AC nên trong (SAC) gọi $R = IJ \cap AC$ thì R cố định.

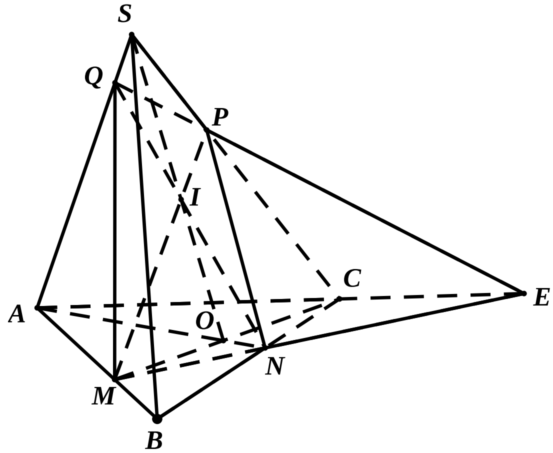
Dễ thấy $PQ = (ABCD) \cap (\alpha)$.

$R = IJ \cap AC \Rightarrow \begin{cases} R \in IJ \\ R \in AC \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in (\alpha) \\ R \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow R \in PQ$.

Vậy PQ luôn đi qua điểm R cố định khi (α) thay đổi.

13. a) Trong (ABC) gọi $E = MN \cap AC$, trong (SAC) gọi $Q = EP \cap SA$, thiết diện là tứ giác $MNPQ$.



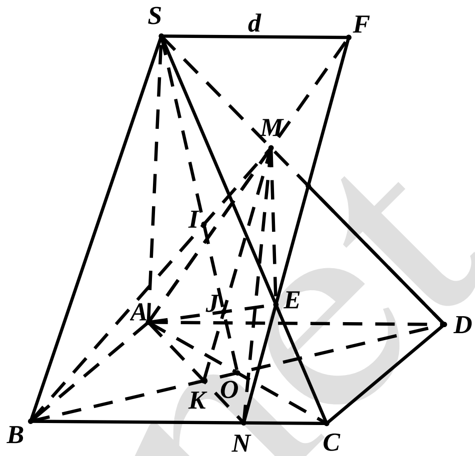
b) Vì $I = MP \cap NQ$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in MP \subset (SMC) \\ I \in NQ \subset (SAN) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAN) \cap (SMC)$

Mặt khác gọi $O = AN \cap CM$ thì O cố định nên $SO = (SCM) \cap (SAN)$ cố định.

Vậy I thuộc đường thẳng SO cố định.



14. a) Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap BM$

thì $\begin{cases} I \in BM \\ I \in SO \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow I = BM \cap (SAC)$.

b) Gọi $K = AN \cap BD$, $J = SO \cap KM$, $E = AJ \cap SC$.

Do $J \in KM \subset (AMN) \Rightarrow AJ \subset (AMN)$

$\Rightarrow E \in (AMN)$

$\Rightarrow E \in (SBC) \cap (AMN)$.

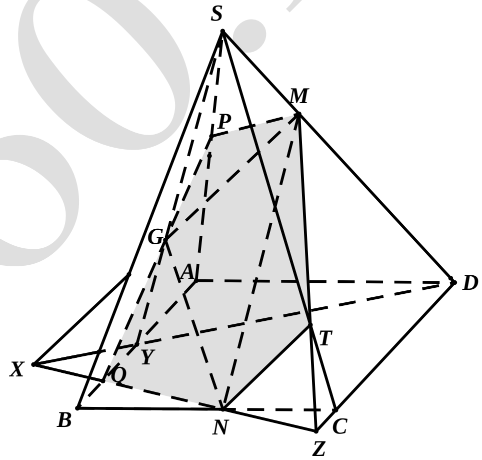
Từ đó ta có $NE = (AMN) \cap (SBC)$.

Gọi $d = (SAD) \cap (SBC)$ thì d cố định.

Trong (SAD) gọi $F = AM \cap d$ thì F cố định.

Do $F \in d \subset (SBC) \Rightarrow F \in (SBC)$.

Vậy N, E, F là điểm chung của hai mặt phẳng (AMN) và (SBC) nên chúng thẳng hàng, hay NE đi qua điểm F cố định.



c) Gọi Y là trung điểm của AB và $X = DY \cap MG$. Trong $(ABCD)$ gọi $O = NX \cap AB$ và $Z = NX \cap CD$, trong (SCD) gọi $T = MZ \cap SC$

trong (SAB) gọi $P = QG \cap SA$. Thiết diện là ngũ giác $MPQNT$.

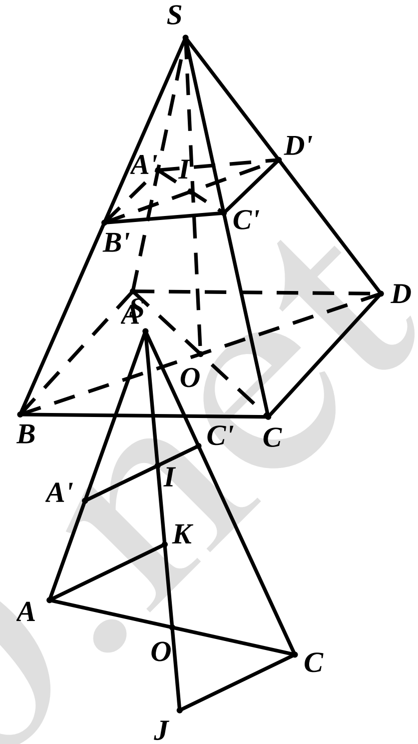
15.

a) Trong (SAC) gọi $I = SO \cap A'C'$, vì $I \in SO \subset BD \Rightarrow I \in (SBD)$.

Trong (SBD) gọi $D' = B'I \cap SD$

$\Rightarrow \begin{cases} D' \in SD \\ D' \in B'I \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow D' = SD \cap (\alpha)$.

b) Kẻ $AK // A'C', K \in SO$ và $CJ' // A'C', J \in SO$.



Ta có $\dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{SK}{SI}$.

Và $\dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SJ}{SI} \Rightarrow \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SO}{SI} + \dfrac{SK}{SI}$

$= \dfrac{SO + SJ}{SI} = \dfrac{(SO - OK) + (SO + OJ)}{SI} = \dfrac{2SO}{SI}$ (1)

(do $AK // CJ \Rightarrow \dfrac{OK}{OJ} = \dfrac{OA}{OC} = 1 \Rightarrow OK = OJ$)

Tương tự ta cũng tính được $\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{2SO}{SI}$ (2)

Từ (1),(2) suy ra: $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$

(đpcm)

16. a) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap BI$

$\Rightarrow E \in BI \subset (SBI)$. Trong (SBI) gọi

$K = IJ \cap SE \Rightarrow \begin{cases} K \in IJ \\ K \in SE \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$.

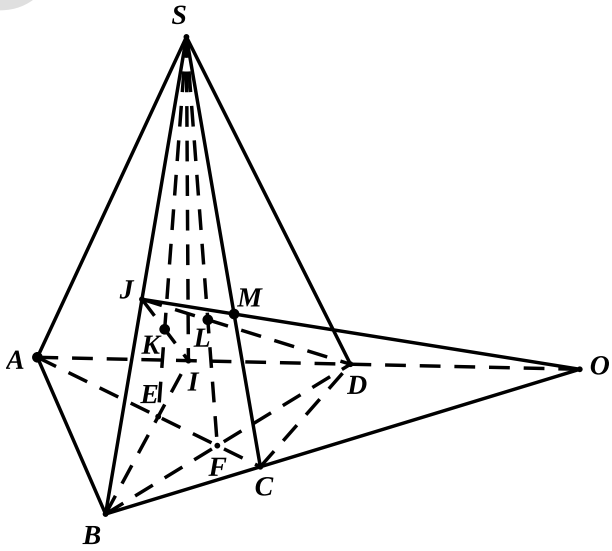
Trong $(ABCD)$ gọi $F = AC \cap BD$

$\Rightarrow F \in BD \subset (SBD)$.

Trong (SBD) gọi

$L = SF \cap DJ \Rightarrow \begin{cases} L \in DJ \\ L \in SF \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$.



b) Dễ thấy $A, K, L, M \in (SAC)$ (1).

Mặt khác

$K \in IJ \subset (AOJ)$,

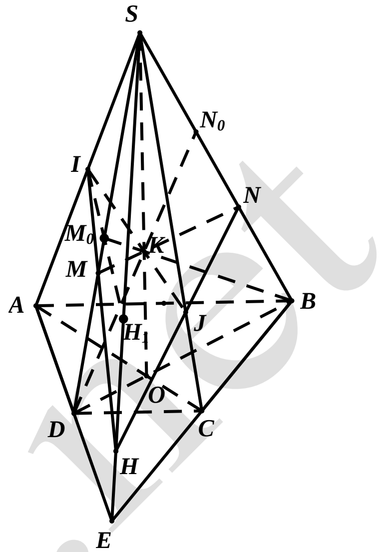
$L \in DJ \subset (AOJ)$, $M \in OJ \subset (AOJ)$

nên $A, K, L, M \in (AOJ)$ (2).

Từ (1),(2) suy ra A, K, L, M cùng thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (AOJ) nên chúng thuộc giao tuyến của hai mawth phẳng (SAC) và (AOJ), hay A, K, L, M thẳng hàng.

17. Gọi $O = AC \cap BD$, $K = IJ \cap SO$ thì SO, MN, IJ đồng quy tại K

Gọi



$H = MI \cap NJ \Rightarrow \begin{cases} H \in MI \subset (SAB) \\ H \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD)$.

Gọi $E = AD \cap BC \Rightarrow SE = (SAD) \cap (SBC)$. Vậy $H \in SE$.

Gới hạn

Gọi $M_0 = BK \cap SD$ và $N_0 = DK \cap SB$

Khi $M \to M_0$ thì $N \to B$

Khi $N \to N_0$ thì $M \to D$

Vậy để (α) cắt các cạnh SB, SD thì M thuộc đoạn DM_0 và N thuộc đoạn BN_0.

Gọi $H_1 = IM_0 \cap SE$ thì quỹ tích điểm H là tia H_1x chứa E.

(Bạn đọc tự làm phần đảo).

18. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và $E = AI \cap CD$.

Theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{ED}{EC}=\frac{BD}{BC}\ (1)$. Mặt khác từ giả thiết

$AB.CD=AC.BD \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EC}{ED}=\frac{AD}{AC} \Rightarrow AE$ là đường phân giác của góc A trong tam giác ACD. Nghĩa là tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ACD thuộc AE. Do AI và BJ cùng thuộc (ABE) nên chúng cắt nhau tại O. Vậy bốn đường thẳng nối các đỉnh với tâm đường tròn nội tiếp các mặt đối diện đôi một cắt nhau và chúng không đồng phẳng nên phải đồng quy.