Đáp án chuyên đề:
Hai đường thẳng vuông góc - Hình học 11

16.

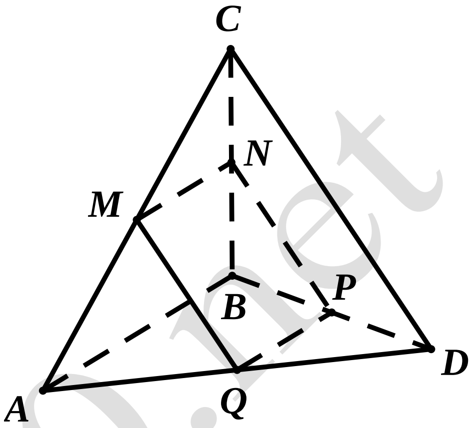
a) Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0 - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0$

$= a.a.\frac{1}{2} - a.a.\frac{1}{2} = 0$

Vậy $AB \perp CD$.



b) Ta có $MN \,//\, PQ \,//\, AB$ và

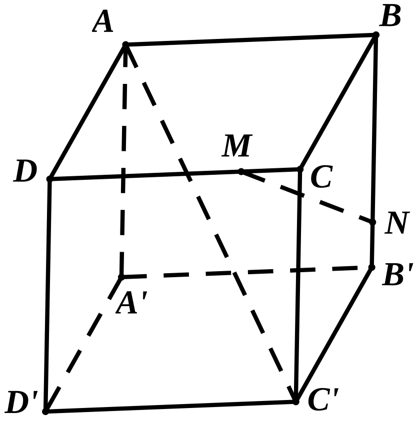
$MN = PQ = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ nên tứ giác

$MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ NP \,//\, CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$, do

đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.

17. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.



a) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'} = \vec{c} - \vec{b}$ nên

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$

$= \vec{a}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) + \vec{c}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - a^2 = 0$

$\Rightarrow AC' \perp B'D'$.

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right) - \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}\right)$

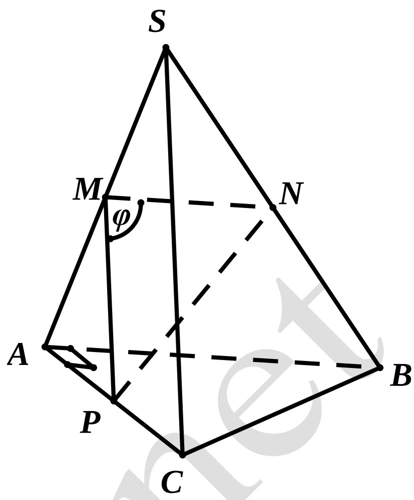
$= \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$

Từ đó ta có

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)[\left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}]$

$= \frac{x}{a}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^2 - \vec{c}^2 = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0$.

Vậy $AC' \perp MN$.



18. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC, khi đó $MN // AB$ nên $(AB, SC) = (MN, SC)$.

Đặt $\varphi = NMP$, trong tam giác MNP có

$$\cos\varphi = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN.MP} \quad (1).$$

Ta có $MN = MP = \frac{a}{2}$,

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A, vì vậy $PB^2 = AP^2 + AC^2 = \frac{5a^2}{4}$,

$PS^2 = \frac{3a^2}{4}$.Trong tam giác PBS theo công thứ tính đường trung tuyến ta có

$$PN^2 = \frac{PB^2 + PS^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Thay MN, MP, NP vào (1) ta được $\cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^0$.

Vậy $(AB, SC) = (MN, SC) = 60^0$.

19. a) $(BC, SD) = 45^0$ b) $(IJ, AC) = 90^0$.

20.

a) Gọi P là trung điểm của BC, thì các tam giác

ABC và DBC cân nên $\begin{cases} AP \perp BC \\ DP \perp BC \end{cases}$.

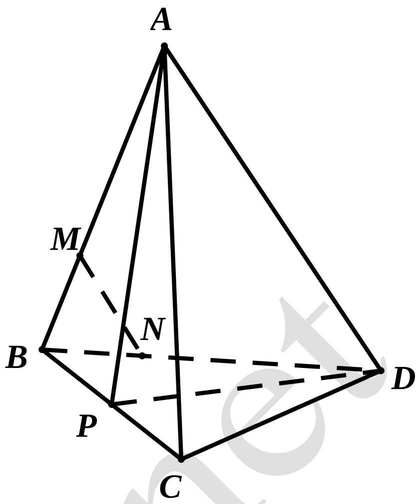
Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA}\right) = 0$

Vậy $BC \perp AD$.

b) Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = |k|$,

$\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB} \Rightarrow \dfrac{ND}{NB} = |k| \quad \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ND}{NB}$

suy ra



$MN \mathbin{//} AD \Rightarrow (MN, BC) = (AD, BC) = 90^0$ (Theo câu a)

21. HS tự giải.

22. Gọi O là trung điểm của AC, ta có $OM = ON = a$.

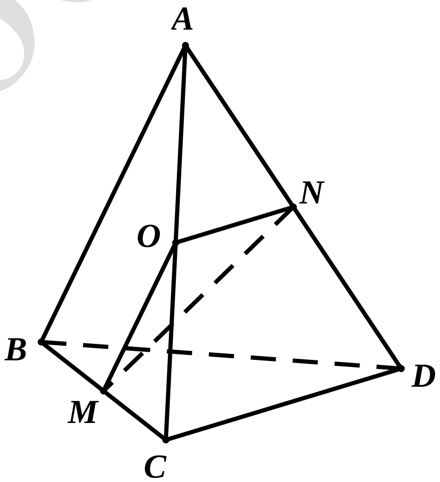
$\begin{cases} OM \mathbin{//} AB \\ ON \mathbin{//} CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (OM, ON)$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OMN ta có

$$\cos MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM.ON}$$

$$= \frac{a^2 + a^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $(AB, CD) = 60^0$.



23. a) Ta có $MC = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác MCD cân tại M, do đó $MN \perp CD$.

Lại có $RP // CD \Rightarrow MN \perp RQ$.

b) Tương tự ta có $QP \perp AD$

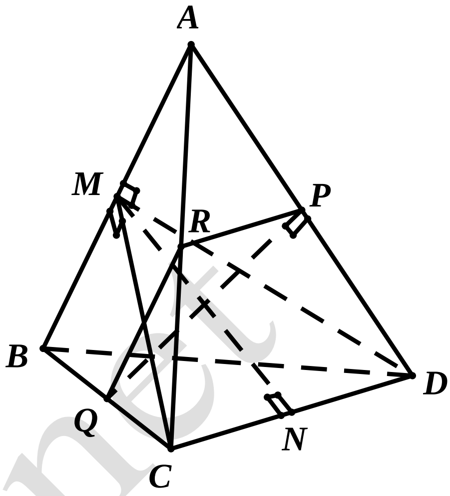
Trong tam giác vuông PDQ ta có

$QP^2 = QD^2 - DP^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ Ta có :

$RQ^2 + RP^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 = QP^2$

Do đó tam giác RPQ vuông tại R, hay $RP \perp RQ$.

Vì vậy $\begin{cases} AB // RQ \\ CD // RP \\ RP \perp RQ \end{cases} \Rightarrow AB \perp CD$.



24. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD.

a) Do hai tam giác ACD và BCD có CD chung và $AC = BD, AD = BC$ nên chúng bằng nhau, suy ra $MC = MD$

Vậy tam giác MCD cân tại M và có trung tuyến MN nên $MN \perp CD$.

Tương tự $MN \perp AB$.

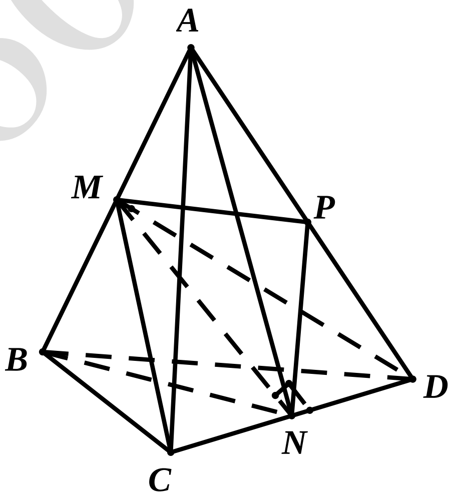
Chứng minh tương tự cho hai cặp cạnh đối còn lại .

b) Ta có

$\begin{cases} PM // BD \\ PN // AC \end{cases} \Rightarrow (BD, AC) = (PM, PN)$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$CM^2 = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$



Tương tự $DM^2 = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, nên

$$MN^2 = \frac{MC^2+MD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác PMN ta có

$$\cos MPN = \frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2.PM.PN} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}{2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{2\left(a^2-c^2\right)}{b^2}$$

Vậy $\left(AC,BD\right) = \arccos\left|\dfrac{2\left(a^2-c^2\right)}{b^2}\right|$.

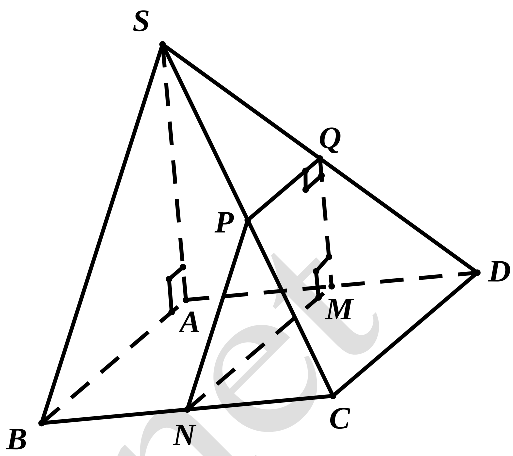
25. a) Ta có $\begin{cases}(\alpha) // (SAB)\\ (SAB)\cap(ABCD) = AB\\ (\alpha)\cap(ABCD) = MN\end{cases} \Rightarrow MN // AB$.

Tương tự $\begin{cases}(\alpha) // (SAB)\\ (SBC)\cap(SAB) = SB\\ (\alpha)\cap(SBC) = NP\end{cases} \Rightarrow NP // SB$

$$\begin{cases}(\alpha) // (SAB)\\ (SAD)\cap(SAB) = SA\\ (\alpha)\cap(SAD) = MQ\end{cases} \Rightarrow MQ // SA$$

Dễ thấy $MN // PQ // AB // CD$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $\begin{cases} MN // AB \\ MQ // SA \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ$.



Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Ta có $MN = AB = a$, $MQ = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$,

$PQ = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MN + PQ).MQ$

$= \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{2}\right)\dfrac{a}{2} = \dfrac{3a^2}{8}$.