

Đáp án chuyên đề: Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song - Hình học 11

19. Do M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC nên $MN \parallel BC$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} D \in (DMN) \cap (SBC) \\ MN \subset (DMN) \\ BC \subset (SBC) \\ MN \parallel BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow (DMN) \cap (SBC) = d \parallel MN \parallel BC, D \in d.$$

20. a) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,BC.

Do G_1, G_2 là trọng tâm các tam giác SBC và SAB nên $\frac{SG_1}{SN} = \frac{2}{3}, \frac{SG_2}{SM} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{SG_1}{SN} = \frac{SG_2}{SM}$$

$\Rightarrow G_1G_2 \parallel MN$. Mặt khác

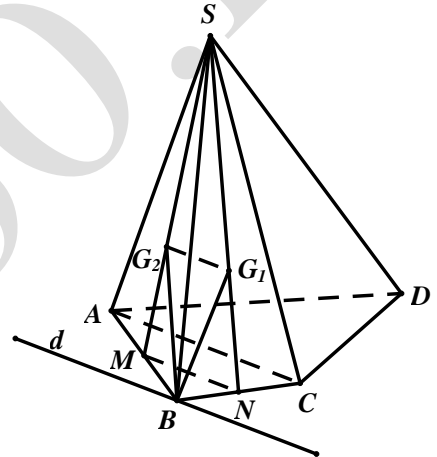
$MN \parallel AC \Rightarrow G_1G_2 \parallel AC$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} B \in (BG_1G_2) \\ G_1G_2 \subset (BG_1G_2) \\ AC \subset (ABCD) \\ G_1G_2 \parallel AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow (BG_1G_2) \cap (ABCD) = d \parallel AC \parallel G_1G_2,$$

21. a) Ta có

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD)$$



$=d \parallel AB \parallel CD, S \in d$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} M \in (SCD) \cap (ABM) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (ABM) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = d' \parallel AB \quad M \in d'$.

Trong (SCD) gọi

$N = d' \cap SD \Rightarrow N = SD \cap (ABM)$ Do $MN \parallel AB$

nên tứ giác $ABMN$ là hình thang.

c) Gọi $\Delta = (SAD) \cap (SBC)$ thì Δ cố định.

Vì

$$I = AN \cap BM \Rightarrow \begin{cases} I \in AN \subset (SAD) \\ I \in BM \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in \Delta.$$

Vậy $I \in \Delta$ cố định.

22.

a) Ta có $MN \parallel \frac{1}{2}AB$ và $PQ \parallel \frac{1}{2}CD$

mà $AB \parallel CD$ nên $MN \parallel PQ$.

Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} I \in (IMN) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ MN \subset (IMN) \\ AB \parallel MN \end{cases}$$

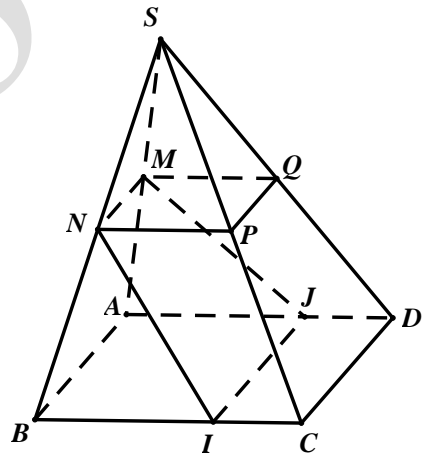
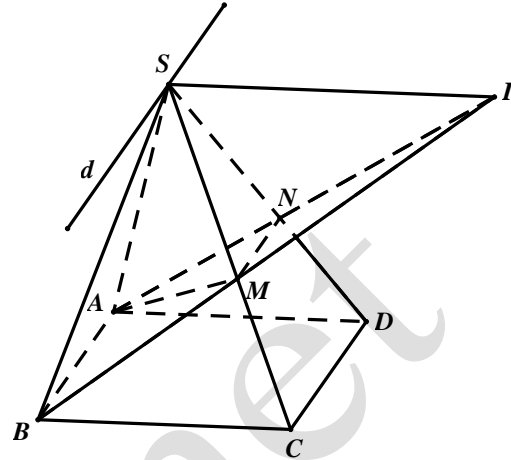
$\Rightarrow (IMN) \cap (ABCD) = IJ \parallel AB \parallel MN$ với

$J \in AD$. Thiết diện của hình chóp với

(IMN) là hình thang $MNIJ$.

23. a) Ta có

$$\begin{cases} F \in (IJF) \cap (ACD) \\ IJ \subset (IJF), CD \subset (ACD) \Rightarrow (IJF) \cap (ACD) = FE \parallel CD \parallel IJ. \\ IJ \parallel CD \end{cases}$$



Thiết diện là tứ giác IJEF.

b) Để thiết diện IJEF là hình bình hành thì

$IJ \parallel EF$ mà $IJ \parallel \frac{1}{2}CD$ nên $EF \parallel \frac{1}{2}CD$, hay

EF là đường trung bình trong tam giác ACD ứng với cạnh CD do đó E là trung điểm của AD.

c) Để thiết diện IJEF là hình thoi thì trước tiên nó phải là hình bình hành, khi đó E là trung điểm của AD. Mặt khác IJEF là hình thoi thì

$IJ = IF$, mà $IJ = \frac{1}{2}CD, IF = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = CD$.

Vậy điều kiện để thiết diện là hình thoi là tứ diện ABCD có $AB = CD$ và E là trung điểm của AD.

24. a) Trong (BCD), từ D kẻ đường thẳng song song với BM cắt BC tại K. Nối K và N cắt AC tại I. Trong (IKD), từ I kẻ đường thẳng song song với DK cắt DN tại J.

Khi đó $IJ \parallel BM$.

b) Do BM là đường trung bình của tam giác CKD

nên $KD = 2BM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

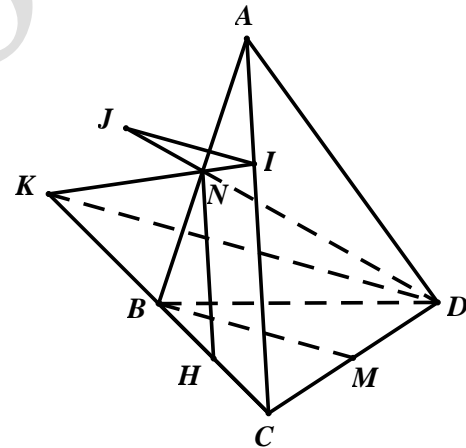
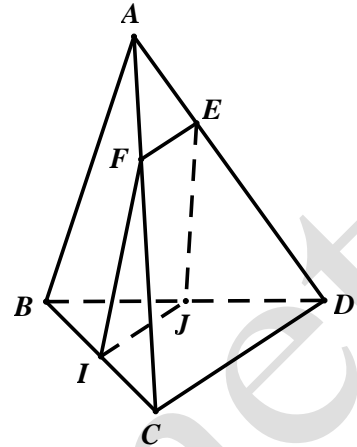
Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó

$$HN \parallel AC \Rightarrow \frac{NK}{NI} = \frac{KH}{HC} = \frac{3HC}{HC} = 3$$

$$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{1}{3}KD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

25. a) Ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$



$$I = MN \cap PQ \Rightarrow \begin{cases} I \in MN \subset (SAB) \\ I \in PQ \subset (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$, hay $I \in SE$.

$$\text{b) Do } \begin{cases} I \in (IAD) \cap (IBC) \\ AD // BC \\ AD \subset (IAD) \\ BC \subset (IBC) \end{cases}$$

$\Rightarrow (IAD) \cap (IBC) = \Delta // AB // DC, I \in \Delta$ Mặt khác theo giả thiết $\Delta \subset (\alpha)$ nên

$$\begin{cases} \Delta \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ \Delta // BC \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \end{cases} \Rightarrow NP // BC // \Delta$$

Tương tự ta cũng có $MQ // AD // \Delta$.

Vậy $MQ // NP // BC // AD // \Delta$.

26. a) Gọi $E = AM \cap BC, F = BM \cap AD$. Từ M kẻ các đường thẳng song song với SA, SB lần lượt cắt SE, SF tại N, P . Thì N, P là các điểm cần dựng.

$$\text{b) Ta có } \frac{MN}{SA} = \frac{EM}{EA}, \frac{MP}{SB} = \frac{FM}{FB} = \frac{AM}{AE} \text{ nên}$$

$$\frac{MN}{SA} + \frac{MP}{SB} = \frac{EM}{EA} + \frac{AM}{EA} = 1.$$

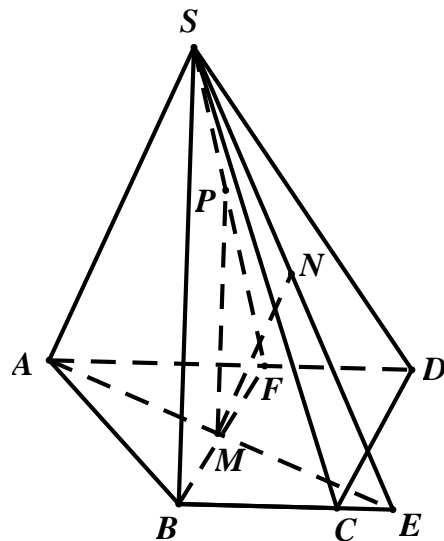
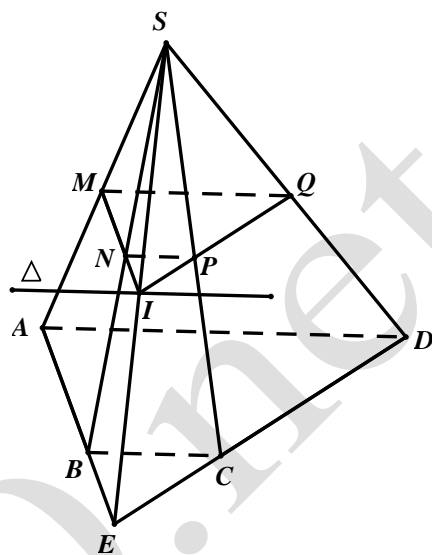
Theo BĐT Cauchy ta có

$$\begin{aligned} MN \cdot MP &= SA \cdot SB \cdot \frac{MN}{SA} \cdot \frac{MP}{SB} \\ &\leq \frac{SA \cdot SB}{4} \left(\frac{MN}{SA} + \frac{MP}{SB} \right)^2 = \frac{SA \cdot SB}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \max(MN \cdot MP) = \frac{SA \cdot SB}{4} \text{ khi } \frac{MN}{SA} = \frac{MP}{SB} = \frac{1}{2} \text{ hay}$$

M là trung điểm của AE và BF , do đó tập hợp điểm M là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

27.



a) Ta có
$$\begin{cases} P \in (ADP) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (ADP) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (ADP) \cap (SBC) = PQ \parallel AD \parallel BC, Q \in SC$$

b) Gọi $I = AP \cap SM, J = DQ \cap SN$ thì $IJ = (ADP) \cap (SMN)$.

Để thấy I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SCD . Gọi $K = IJ \cap PD$, ta có $IJ = IK + KJ$.

Ta có
$$\frac{IK}{AD} = \frac{PI}{PA} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow IK = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}a.$$

Tương tự
$$\frac{JK}{PQ} = \frac{DQ}{DQ} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow JK = \frac{2}{3}PQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{3}b.$$

Vậy $IJ = IK + KJ = \frac{1}{3}(a + b).$

28. (HS tự giải)

29.

a) Gọi $E = AM \cap BC$, trong (SAE) vẽ đường thẳng đi qua M và song song với SA cắt SE tại A' thì A' là điểm cần dựng. Các điểm B', C' được dựng tương tự.

b) Ta có $MA' \parallel SA$ nên

$$\frac{MA'}{SA} = \frac{EM}{AE} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{MB'}{SB} = \frac{IM}{IB} = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}} \quad (2)$$

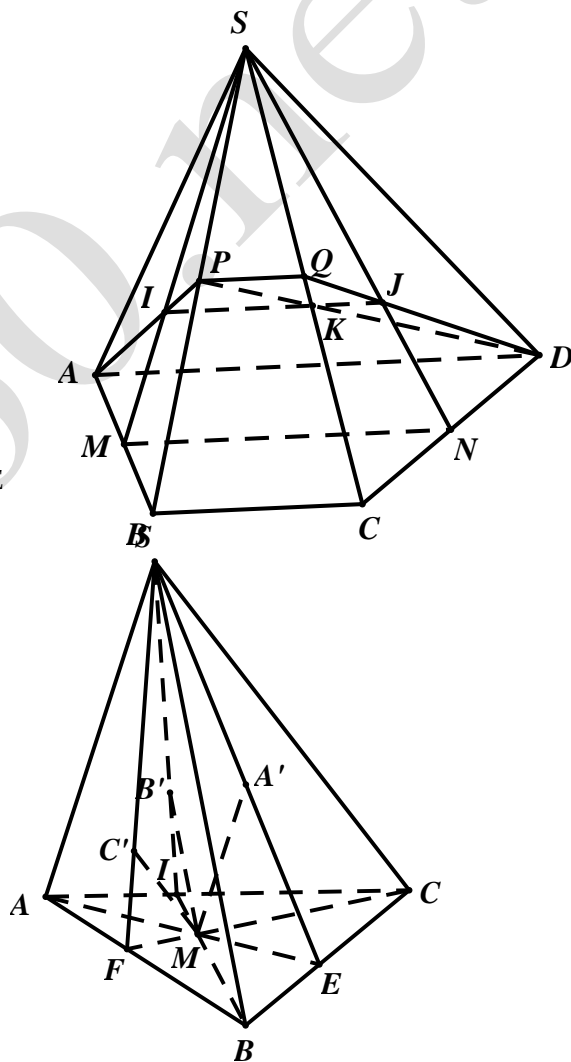
$$\frac{MC'}{SC} = \frac{FM}{FC} = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} \quad (3)$$

Cộng các đẳng thức (1),(2),(3) ta được

$$\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$$

b) Ta có

$$MA' \cdot MB' \cdot MC' = SA \cdot SB \cdot SC \cdot \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$$



$$\leq SA.SB.SC \left(\frac{\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC}}{3} \right)^3 = \frac{SA.SB.SC}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{MA'}{SA} = \frac{MB'}{SB} = \frac{MC'}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EM}{EA} = \frac{IM}{IB} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow M$ là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Vậy } \max(MA'.MB'.MC') = \frac{SA.SB.SC}{27}.$$

30. Trước tiên do M, N, E, F đồng phẳng nên theo định lí Menelaus trong không gian ta có $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$.

$$\text{Do đó } (MA.NB.PC.QD)^2 = (MA.NB.PC.QD)(MB.NC.PD.QA) \quad (1)$$

Theo BĐT Cau Chy ta có

$$MA.MB \leq \left(\frac{MA+MB}{2} \right)^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$NB.NC \leq \left(\frac{NB+NC}{2} \right)^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$$PC.PD \leq \left(\frac{PC+PD}{2} \right)^2 = \frac{CD^2}{4}$$

$$QD.QA \leq \left(\frac{QD+QA}{2} \right)^2 = \frac{AD^2}{4}$$

Nhân theo vế các BĐT trên và kết hợp với (1) thu được:

$$MA.NB.PC.QD \leq \frac{AB.BC.CD.AD}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA nên $MNPQ$ là hình bình hành.

