

Đáp án chuyên đề:

Khoảng cách và góc - Hình học 10

Bài 3.47. a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ b) 2 c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

Bài 3.48. a) $\forall 1 \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \neq \frac{1}{-3}$ b)

$$M \ 1;1 \in d_1 \Rightarrow S = d^2 \quad M; d_2 = \frac{1}{52}$$

$$\text{c) } M \ x;y \in \Delta \Rightarrow \frac{|2x - 3y + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|-4x + 6y - 3|}{\sqrt{52}}$$

$$\Rightarrow \Delta : 2x - 3y + 1 = 0$$

Bài 3.49. ĐS: $3x + 4y - 2 = 0$ và $3x - 4y - 10 = 0$.

Bài 3.50. Đường thẳng qua I có dạng

$$\Delta : a \ x + 2 \ + b \ y - 3 \ = 0 \Leftrightarrow ax + by + 2a - 3b = 0$$

$$\text{Ta có } d \ A;\Delta = d \ B;\Delta \Leftrightarrow \frac{|7a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b \\ a = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\Delta : 4x + y + 5 = 0$ hoặc $\Delta : y = 3$

Bài 3.51. a) $C \ 2t - 8; t$, $AB : x + 3y - 8 = 0$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} d \ C;AB \cdot AB \Leftrightarrow 17 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|5t - 16|}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -\frac{18}{5} \end{cases}$$

Suy ra $C \ 12;10$ hoặc $C \left(-\frac{76}{5}; -\frac{18}{5}\right)$

b) Tương tự.

Bài 3.52. a) $M \in Ox \Rightarrow M \ a;0$.

$$d \ M;d_1 = d \ M;d_2 \Leftrightarrow \frac{|2a + 5|}{\sqrt{13}} = \frac{|3a - 2|}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ a = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là $M_1 \ 7;0$ và $M_2 \left(-\frac{3}{5}; 0\right)$

b) $M \in d_1 \Rightarrow M(1-2t; 1+t)$.

$$d M; d_2 = d M; d_3 \Leftrightarrow \frac{|13-4t|}{10} = \frac{|3-11t|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{7}{18} \\ t = \frac{19}{26} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là $M_1\left(\frac{16}{9}; \frac{11}{18}\right)$ và $M_2\left(-\frac{6}{13}; \frac{45}{26}\right)$

Bài 3.53. Gọi $M(x; y)$

$$MA = MB \Leftrightarrow x-2^2 + y-1^2 = x+3^2 + y-2^2 \Leftrightarrow y = 5x + 4$$

(1) $d M; d = 2 \Leftrightarrow \frac{|4x+3y+5|}{5} = 2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$$M_1\left(-\frac{7}{19}; \frac{41}{19}\right), M_2\left(-\frac{27}{19}; -\frac{59}{19}\right)$$

Bài 3.54. Gọi $B(x; y)$, $\vec{BC} = \vec{AO} \Rightarrow C(x-3; y-1)$

Mặt khác ta có

$$\begin{cases} AB = AO \\ \vec{AB} \cdot \vec{AO} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3^2 + y-1^2 = 10 \\ -3(x-3) - 1(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \text{(loại)}$$

Do đó $B(2; 4)$, $C(-1; 3) \Rightarrow AC: x+2y-5=0$, $BO: 2x-y=0$

Bài 3.55. ĐS: $C_1(7; 3)$, $C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$

Bài 3.56. $G(2t+1; t) \Rightarrow C(6t; 3t+5)$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(C; AB) \cdot AB \Leftrightarrow 8 = |9t+6| \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{9} \\ t = -\frac{14}{9} \end{cases}$$

Suy ra có hai điểm thỏa mãn $C_1\left(\frac{4}{3}; \frac{17}{3}\right)$, $C_2\left(-\frac{28}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Bài 3.57. Ta có

$$AB : 3x - y + 1 = 0, AC : x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow B \quad -2; -5, C \quad 4; -1$$

$$\text{Suy ra } BC : 2x - 3y - 11 = 0 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{50} = \frac{35\sqrt{26}}{13}$$

Bài 3.58. $S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow AB \cdot d(M; AB) = CD \cdot d(M; CD)$ từ đó ta tìm được tập hợp các điểm M là hai đường thẳng có phương trình $3x + 7y - 21 = 0$ và $5x - y + 13 = 0$

Bài 3.59. Ta có: $AB : 2x + y - 2 = 0$.

$$I \in d : y = x \Rightarrow I \quad t; t, C \quad 2t - 1; 2t, D \quad 2t; 2t - 2.$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot CH = 4 \Rightarrow CH = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow d(C; AB) = CH \Leftrightarrow \frac{|6t - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Từ đó tọa độ của C và D là $C \left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3} \right), D \left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3} \right)$ hoặc $C \quad -1; 0, D \quad 0; -2$

Bài 3.60. Giả sử vector pháp tuyến của đường thẳng MN là $\vec{u} \quad a; b$. Khi đó $MN : a \cdot x - 2 + b \cdot y - 3 = 0, NP : b \cdot x - 5 - a \cdot y - 2 = 0$. Ta

$$d(C; MN) = d(D; NP); S(MNPQ) = (d(C; MN))^2 = \frac{(6a + 3b)^2}{a^2 + b^2}$$

có

$$\leq \frac{(6^2 + 3^2)(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 40$$

Dấu bằng khi $a = 2b$. Chọn $a = 1, b = 1$ và gọi $D \quad t; t + 5$ thay vào $d(C; MN) = d(D; NP)$ ta được $t = 4; t = -26$

Vậy $D \quad 4; 9$ hoặc $D \quad -26; -21$

Bài 3.61. Kẻ $BH \perp \Delta$ tại H, $CH \perp \Delta$ tại K. Gọi M là trung điểm của BC suy ra $M \quad 4; 2$,

$$AM = \sqrt{5}, BC = 6.$$

+ TH1: Nếu Δ không cắt BC khi đó gọi I là hình chiếu M lên Δ thì

$$BH + CK = 2MI \leq AM = \sqrt{5}$$

+ TH2: Nếu Δ cắt BC khi đó $BH + CK \leq BC = 6$

Từ hai trường hợp trên suy ra $BH + CK \leq 6$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta \perp BC$

Ta có $\overrightarrow{BC} = 0; 6 \Rightarrow \Delta : 0x - 2 + 6y - 3 = 0$ hay $y = 3$

Bài 3.62. Do $C \in Oy \Rightarrow C = 0; c$; $B \in \Delta \Rightarrow B = 3b; 4 - 4b$

Tam giác ABC vuông tại C

$$\Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow 9b - c - 4 - 4b - c = 0 \Rightarrow b - 1 = -\frac{c^2 + 9}{9 + 4c} \quad (1)$$

Lại có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} d_{C, \Delta} \cdot AB = \frac{|3c - 12|}{10} \sqrt{25 - (b - 1)^2} = \frac{3}{2} |c - 4| |b - 1|, \text{ do}$$

$$\text{đó : } S_{ABC} = 6 \Rightarrow |c - 4| |b - 1| = 4 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có :

$$c^2 + 9 \left| \frac{c - 4}{9 + 4c} \right| = 4 \Rightarrow \begin{cases} c^3 - 4c^2 - 7c - 72 = 0 \\ c^3 - 4c^2 + 25c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \quad \text{Do } c < 1$$

Vậy $C \equiv O = 0; 0$, $B = 0; 4$ hay $G \left(1; \frac{4}{3} \right)$.

Bài 3.63. a) $\cos d_1; d_2 = \frac{9}{\sqrt{130}}$, b) $\cos d_1; d_2 = \frac{|1 - m|}{\sqrt{2 + 2m^2}}$

Bài 3.64. a) Đường thẳng d đi qua M có dạng

$$d : ax + by + 2a + b = 0, a^2 + b^2 \neq 0$$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 30° nên:

$$\cos 30^\circ = \frac{|3a + 2b|}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|3a + 2b|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{24 \pm 13\sqrt{3}}{23} a \Rightarrow d_1 : 23x + 24 + 13\sqrt{3}y + 70 + 13\sqrt{3} = 0 \text{ và}$$

$$d_2 : 23x + 24 - 13\sqrt{3}y + 70 - 13\sqrt{3} = 0$$

b) Đường thẳng d đi qua M có dạng

$$d : ax + by - 4a - b = 0, a^2 + b^2 \neq 0$$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 60° nên:

$$\cos 60^\circ = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}a$$

Suy ra $d_1 : x + \sqrt{3}y - 4 - \sqrt{3} = 0$ và $d_2 : x - \sqrt{3}y - 4 + \sqrt{3} = 0$

Bài 3.65. Có

$A \notin \Delta : 7x - y + 8 = 0 \Rightarrow B, D \in \Delta, BD : x + 7y - 31 = 0.$

$I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$ làm tâm hình vuông suy ra $C(3; 4)$.

Đường thẳng qua A có dạng $ax + by + 4a - 5b = 0, a^2 + b^2 \neq 0$

Ta có $\cos \angle B, \angle D = \cos 45^\circ = \frac{|a + 7b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2 + b^2}}$

$AB : 4x + 3y + 1 = 0, AD : 3x - 4y + 32 = 0, CD : 4x + 3y - 24 = 0,$

$BC : 3x - 4y + 7 = 0$ hoặc $AB : 3x - 4y + 32 = 0$

$AD : 4x + 3y + 1 = 0,$

$CD : 3x - 4y + 7 = 0, BC : 4x + 3y - 24 = 0$

Bài 3.66. Đường thẳng AC qua M(1;1) có dạng

$ax - 1 + by - 1 = 0$

Theo bài ra, tam giác ABC cân đỉnh A nên ta có $AB; BC = AC; CA$

từ đó ta tìm được phương trình đường thẳng AC là

$AC : 17x + 7y - 24 = 0$

Bài 3.67. Đáp số : $AB : x - 2 = 0, AC : x + \sqrt{3}y - 2 - 6\sqrt{3} = 0$

Bài 3.68. Gọi H là trực tâm tam giác khi đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$

Ta có $A'B' : 4x - 3y - 2 = 0, B'C' : y - 2 = 0$

Khi đó ta viết được phương trình đường phân giác trong ngoài $A'B'C'$ là $2x + y - 6 = 0$ cũng chính là phương trình đường thẳng AC

Bài 3.69. Giả sử $M(x; y)$. Kẻ $MH \perp AB$. Từ giả thiết suy ra $MH = \frac{\sqrt{10}}{2}$

và $\triangle MAH$ vuông cân.

Suy ra $AM = MH\sqrt{2} = \sqrt{5}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 135^\circ \\ AM = \sqrt{5} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3(x-1) + 1(y-2)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

Đặt $u = x - 1, v = y - 2$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} 3u + v = -5 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1, v = -2 \\ u = -2, v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 0) \\ M(-1; 3) \end{cases}$$

Bài 3.70. I thuộc đường thẳng $x + y - 4 = 0$ nên $I(x_0; 4 - x_0)$

$$AD = 2\sqrt{5}, IA = \sqrt{2x_0^2 - 4x_0 + 4}, ID = \sqrt{2x_0^2 - 8x_0 + 40}$$

$$\frac{IA^2 + ID^2 - AD^2}{2IA \cdot ID} = \cos AID$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 3x_0 + 6}{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 20} \cdot \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3x_0 + 6 > 0 \\ x_0^4 - 6x_0^3 + 12x_0^2 - 24x_0 + 32 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x_0 - 2 & x_0 - 4 & x_0^2 + 4 & = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 4 \end{cases}$$

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow I(2; 2)$ khi đó

$$IA = 2, ID = 4\sqrt{2} \Rightarrow \vec{ID} = -\frac{ID}{IA} \vec{IB} = -2\sqrt{2} \vec{IB}$$

Từ đây suy ra $B(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}), C(2 + 4\sqrt{2}, 2 + 4\sqrt{2})$

- Với $x_0 = 4$: Tương tự ta tìm được $B(4 + 3\sqrt{2}, \sqrt{2}), C(4 + 4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$