Đáp án chuyên đề:

Hàm số liên tục - Giải tích 11

Vấn đề 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Bài 1

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}=f(4)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=4$.

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}}+2\right]=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2+x-1\right)=3\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x=1$.

3. Hàm số liên tục tại $x=1$, không liên tục tại điểm $x=-1$.

Bài 2.

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x+1)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=1$

Vậy ta chọn $f(0)=1$

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+4}+2\right)}{3\left(\sqrt[3]{(2x+8)^2}+2.\sqrt[3]{2x+8}+4\right)}=\dfrac{2}{9}$

Vậy ta chọn $f(0)=\dfrac{2}{9}$.

Bài 3.

1. Ta có: $f(-1)=1$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(2x+3\right)=1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}=\dfrac{3}{2}$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0=-1$.

2. Ta có: $f(0)=2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{1-\sqrt[3]{x-1}+x-1}\right) = 2 = f(0)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$.

3. Ta có : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \dfrac{1}{3} = f(1)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

4. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x-2}}+2x\right] = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-x+3\right) = 5 \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$.

Bài 4.

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+x+1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+2a) = 2a$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x\left(ax+2a+1\right)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4}{(ax+2a+1)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)} = \frac{2}{2a+1}$$

Hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{6}$.

3. Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} = \dfrac{3}{8}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{a(x^2-2)}{x-3} = \dfrac{a}{2}$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow a = \dfrac{3}{4}$.

Vấn đề 2. Xét tính liên tục của hàm số trên một tập

Bài 1

1. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{3;-2\}$

Ta có hàm số liên tục tại mọi $x\in D$ và hàm số gián đoạn tại $x=-2, x=3$

2. TXĐ : $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} f(x)=0=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục trái tại $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x)=0=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục phải tại $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hàm số gián đoạn tại mọi điểm $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc D và gián đoạn tại các điểm

$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Bài 2

1. TXĐ : $D=\mathbb{R}$

- Với $x<2\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x^3-16}\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x>2\Rightarrow f(x)=2-x\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x=2$ ta có : $f(2)=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2-x)=0$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2+2x+4)}=-\frac{1}{24}\neq\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x=2$.

2. Hàm số xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

- Với $x<1\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2}\Rightarrow$ hàm số liên tục

- Với $x > 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x = 1$ ta có : $f(1) = \dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{2}{3};$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2} = \frac{2}{3} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Hàm số liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.

1. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 1$ và gián đoạn tại $x = 1$

2. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$ và gián đoạn tại $x = 0$

3. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$ và gián đoạn tại $x = 2$

4. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq \pm 1$ và gián đoạn tại $x = \pm 1$.

Bài 4.

1. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}a + b = 1 \\ -\dfrac{\pi}{2}a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{\pi} \\ b = 0 \end{cases}$

2. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

Bài 5.

1. Với $x \neq 1$ ta có $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$ nên hàm số liên tục trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 1$

Ta có: $f(1) = 3m - 2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[1 + \frac{x^3+x-2}{(x-1)\left(x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+\frac{x^2+x+2}{x^2-x\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right]=2$$

Nên hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow 3m-2=2 \Leftrightarrow m=\frac{4}{3}$

Vậy $m=\frac{4}{3}$ là những giá trị cần tìm.

2. • Với $x>0$ ta có $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ nên hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$

• Với $x<0$ ta có $f(x)=2x^2+3m+1$ nên hàm số liên tục trên $(-\infty;0)$.

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có: $f(0)=3m+1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2x^2+3m+1\right)=3m+1$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow 3m+1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$

Vậy $m=-\frac{1}{6}$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

3. Với $x>2$ ta có hàm số liên tục.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$ và liên tục tại $x=2$.

• Hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi tam thức

$g(x)=x^2-2mx+3m+2\neq 0,\ \forall x\leq 2$

TH 1: $\begin{cases}\Delta'=m^2-3m-2\leq 0\\ g(2)=-m+6\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{17}}{2}\leq m\leq\frac{3+\sqrt{17}}{2}$

TH 2: $\begin{cases}\Delta'=m^2-3m-2>0\\ x_1=m-\sqrt{\Delta'}>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-3m-2>0\\ m>2\\ \Delta'<(m-2)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m>\frac{3+\sqrt{17}}{2}\\ m<6\end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{17}}{2}<m<6$

Nên $\frac{3-\sqrt{17}}{2}\leq m<6$ (*) thì $g(x)\neq 0,\ \forall x\leq 2$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right) = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} = \dfrac{3}{6-m}$

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa (*))

Vậy $m = 5$ là những giá trị cần tìm.

Vấn đề 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Bài 1

1. Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$, ta có hàm số liên tục trên R và

$f(-2) = -1$; $f(0) = 1$; $f(1) = -1$; $f(2) = 3$

$\Rightarrow f(-2).f(0) = -1 < 0, f(0).f(1) = -1 < 0, f(1).f(2) = -3 < 0$

Suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-2;0),(0;1),(1;2)$.

Mà f(x) là đa thức bậc ba nên f(x) chỉ có tối đa 3 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm.

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2x-3 = 6\sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow (2x-3)^3 - 216(x-1) = 0$

Xét hàm số $f(x) = (2x-3)^3 - 216(x-1)$, ta có hàm số liên tục trên R và

$f(-4) = -251, f(0) = 189, f(1) = -1, f(7) = 35$

Suy ra $\Rightarrow f(-4).f(0) < 0, f(0).f(1) < 0, f(1).f(7) < 0$

Suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-4;0),(0;1),(1;7)$.

Mà f(x) là đa thức bậc ba nên f(x) chỉ có tối đa 3 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm.

Bài 2

1. Ta có hàm số $f(x) = m\left(x-1\right)^3\left(x+2\right) + 2x + 3$ liên tục trên R và

$f(1).f(-2) = -5 < 0 \Rightarrow$ phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;1)$

2. Điều kiện : $x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m\sin x\cos x$, liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và

$f(0).f(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$ do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm

$x_0 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$

Do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

3. Hàm số $f(x)=m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)$ liên tục trên R và $f(a).f(c)=n^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)\leq 0 \Rightarrow$ phuowngt rình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Bài 3 Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$

- $c=0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x=0$
- $c\neq 0$ ta có $f(0)=c; f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=\frac{-c}{m(m+2)}$

$\Rightarrow f(0).f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=\frac{-c^2}{m(m+2)}<0$, suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 4. Gọi $f(x)$ là vế trái của các phương trình

1. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1).f(-1)=-3<0$

Nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;1)$.

2. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)f(-\frac{3}{2})<0;$

$f(-\frac{3}{2})f(-1)<0; f(-1).f(\frac{1}{2})<0; f(\frac{1}{2})f(1)<0; f(1)f(3)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

3. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$f(a)f(b)f(c)=-abc\left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

4. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x).\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

5. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1).f(2)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 5 Ta xét $f(\frac{n}{m})=a\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c$.

Mặt khác từ : $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0 \Rightarrow \frac{m}{n^2}\left(a.\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c\right)+c(\frac{1}{p}-\frac{m}{n^2})=0$

$\Leftrightarrow \frac{m}{n^2}f(\frac{n}{m})+c.\frac{n^2-pm}{pn^2}=0 \Leftrightarrow f(\frac{n}{m})=\frac{pm-n^2}{pm}c=\frac{pm-n^2}{pm}f(0)$

* Xét $c=0$

Nếu $a=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f(x)$ là đa thức không, do đó $f(x)$ sẽ có nghiệm trong $(0;1)$

Nếu $a\neq 0$, từ giả thiết $\Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{n}{m}<1$ và $f(x)=x(ax+b)=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}\in(0;1)$

* Xét $c\neq 0$, ta có: $f\left(\frac{n}{m}\right).f(0)=\frac{pm-n^2}{pm}f^2(0)<0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm

$x\in(0;\frac{n}{m})\subset(0;1)$.

Bài 6.

1. Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$,ta có $y=g(x)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và $g(0)g(1)<0$ nên tồn tại $c\in\left[0;1\right]: g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=c$.

2. • Nếu $f(0)=0$ thì ta chọn $c=0$.

• Nếu $f(0)>0$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$, ta có hàm g liên tục trên $[0;+\infty)$ và $g(0)>0$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L<1$ nên tồn tại số $a>0$ sao cho $\frac{f(a)}{a}<1 \Rightarrow g(a)<0$

$\Rightarrow g(0).g(a)<0$ nên tồn tại số thực $c\in(0;a)$ sao cho $g(c)=0$

Hay là $f(c)=c$.

3. Ta có: $f(x)=f\left(\frac{x}{3}\right)=f\left(\frac{x}{3^2}\right)=...=f\left(\frac{x}{3^n}\right)$

Cho $n\to\infty \Rightarrow \frac{x}{3^n}\to 0,\ \forall x$

Suy ra: $f(x)=f(0)=a,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy f là hàm hằng.

4. Xét hàm số $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$, ta có g là hàm liên tục trên $\left[0;\frac{n-1}{n}\right]$

Và $\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=f(1)-f(0)=0$

Suy ra tồn tại hai chỉ số $i,j\in\{0,1,...,n-1\}$ sao cho : $g\left(\frac{i}{n}\right).g\left(\frac{j}{n}\right)<0$

Hay phương trình : $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-f(x+\frac{1}{n})=0$ có nghiệm trên $\left[0;1\right]$.

Bài 7.

1. Xét hàm số : $g(x)=nf(x)-f(x_1)-f(x_2)-...-f(x_n)$ liên tục trên [a ;b].

Vì f liên tục trên đoạn [a ;b] nên tồn tại giá trị lớn nhất M, nhỏ nhất m do đó tồn tại $\alpha,\beta\in\left[a,b\right]$ sao cho $f(\alpha)=m, f(\beta)=M \Rightarrow g(\alpha).g(\beta)<0$.

2. Hàm số : $f(x)=\cos x-x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0).f(1)=1(\cos 1-1)<0$

Suy ra $\exists\alpha\in\left(0;1\right): f(\alpha)=0$ hay $\cos\alpha=\alpha^2$

Mặt khác hàm số $y=\cos x$ là hàm nghịch biến trên $(0;1)$, hàm $y=x^2$ là hàm đồng biến trên $\left(0;1\right)$ nên α là số duy nhất.

Hàm số $g(x)=x\tan x-1$ liên tục trên $\left(0;1\right)$ và $f(0).f(1)=-1(\tan 1-1)<0$, đồng thời hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;1)$ nên tồn tại duy nhất số thực $\beta\in(0;1)$ sao cho $\beta\tan\beta-1=0$.

Vì $\sin x<x \quad \forall x>0$ nên $g(\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\alpha}-1<0=f(\beta)\Rightarrow\alpha<\beta$.