# TỨ DIỆN VUÔNG

## A. CHUẨN KIẾN THỨC

### A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

**1. Định nghĩa.**

Tứ diện $OABC$ có $OA,OB,OC$ đôi một vuông góc được gọi là tứ diện vuông. Sau đây là một số tính chất và công thức liên quan đến tứ diện vuông mà có nhiều hệ thức tương tự như công thức lượng trong tam giác vuông.

Cho tứ diện $OABC$ có $OA,OB,OC$ đôi một vuông góc,

$OA=a,OB=b,OC=c$, đường cao $OH=h$.

Ta có:

- $H$ là trực tâm tam giác $ABC$
- $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$
- $S_{\Delta ABC}^2=S_{\Delta OAB}^2+S_{\Delta OBC}^2+S_{\Delta OCA}^2$ ( định lí Pitago)
- $S_{\Delta OAB}^2=S_{\Delta ABC}.S_{\Delta HAB}$ ( Công thức hình chiếu)
- Gọi $\alpha,\beta,\gamma$ là góc giữa $OH$ với $OA,OB,OC$ thì $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
- Gọi $A,B,C$ là ba góc của tam giác $ABC$ thì $a^2\tan A=b^2\tan B=c^2\tan C$
- Độ dài đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối bằng nhau.
- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$
- $V=\frac{1}{6}abc$, $S_{tp}=\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

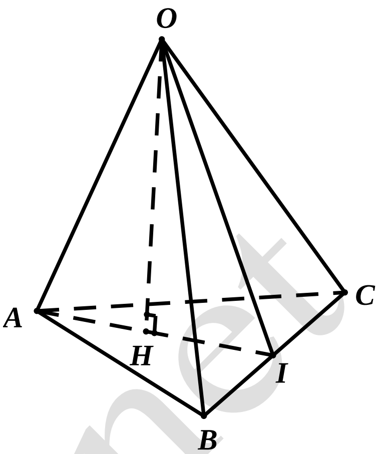
***Chứng minh:***

- Ta có $OA\perp(OBC)\Rightarrow OA\perp BC$, lại có $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp BC$

  $\Rightarrow BC\perp(OAH)\Rightarrow BC\perp AH$.

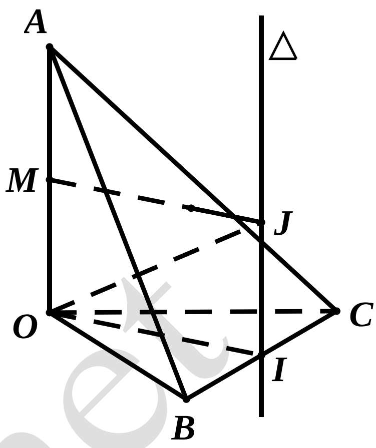
  Tương tự $AB\perp CH$, do đó $H$ là trực tâm tam giác $ABC$.
- Gọi $I$ là giao điểm của $AH$ và $BC$.

  Ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.




- $S^2{}_{ABC} = \frac{1}{4}AI^2BC^2 = \frac{1}{4}\left(OA^2 + OI^2\right)BC^2$
  $= \frac{1}{4}OA^2BC^2 + \frac{1}{4}OI^2BC^2$
  $= \frac{1}{4}OA^2\left(OB^2 + OC^2\right) + \frac{1}{4}OI^2BC^2$
  $= S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$.
- $S^2_{OAB} = \frac{1}{4}OA^2OB^2 = \frac{1}{4}(AH.AI)(BI.BC)$
  $= \left(\frac{1}{2}AI.BC\right)\left(\frac{1}{2}AH.BI\right) = S_{\Delta ABC}.S_{\Delta HAB}$
- Từ $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ suy ra
  $\left(\frac{OH}{OA}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OB}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OC}\right)^2 = 1$
  $\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- Áp dụng định lí cô tang ( định lí cô sin mở rộng) ta có
  $\cot A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4S_{ABC}} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - \left(b^2 + c^2\right)}{4S_{ABC}} = \frac{a^2}{2S_{ABC}}$
  $\Rightarrow a^2 \tan A = 2S_{ABC}$.
  Tương tự ta có $b^2 \tan B = c^2 \tan C = 2S_{ABC}$.
  Vậy $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C$.
- Sử dụng công thức tính đường trung tuyến và định lí pitago ta có ngay
  $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$.
- Theo TC3 ta có $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA} = \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}c^2a^2$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$




- Hiển nhiên
- Từ trung điểm $I$ của $BC$ kẻ đường thẳng $\Delta$ vuông góc với mặt phẳng $(OBC)$, gọi $J$ là giao điểm của $\Delta$ với mặt phẳng trung trực của đoạn $OA$ thì $J$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ và bán kính $R=\sqrt{OI^2+IJ^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**1.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB, AC, AD$ đôi một vuông góc và $AB = AC + AD$. Tính $ABC + DBC + CBD$.

**2**. Cho tứ diện $OABC$ có $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc. Gọi $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$ và $A, B, C$ ba góc của tam giác $ABC$. Đặt $\alpha = AOH, \beta = BOH, \gamma = COH$. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \frac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}.$$

**3.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc, $AC = 2OB, BC = 2OA$. Gọi $D$ là trung điểm của $AB$, $E$ và $F$ là chân đường cao kẻ từ $A$ của các tam giác $OBC$ và $OAC$.

Chứng minh $\frac{\tan^4 OCD}{\tan^4 OCA} + \frac{EF}{AB} = 1$.

**4.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB, AC, AD$ đôi một vuông góc, gọi $H$ là trực tâm tam giác $ABC$. Đặt $\alpha = DAH, \beta = DBH, \gamma = DCH, \varphi = AHB$.

Chứng minh $\sin\varphi = \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$ và $\cos\varphi = -\tan\alpha\tan\beta$.