TỨ DIỆN TRỰC TÂM

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

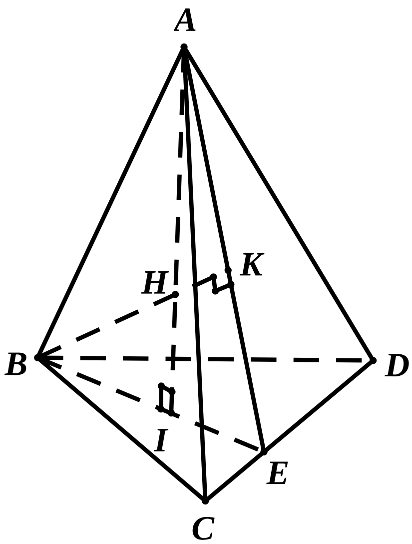
Tứ diện có các đường cao (hoặc phần kéo dài của chúng) cắt nhau tại một điểm được gọi là tứ diện trực tâm.

2. Một số điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện trực tâm.

Mỗi điều kiện sau là một điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện trực tâm.

- Một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc.
- Các đoạn thẳng nối các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Tổng các bình phương của các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Tích các côsin của các góc nhị của các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Các góc giữa các cạnh đối bằng nhau.
- Chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó.

Chứng minh:



- Giả sử tứ diện $ABCD$ có bốn đường cao cắt nhau tại H, khi đó $AH \perp CD, BH \perp CD$ nên $CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

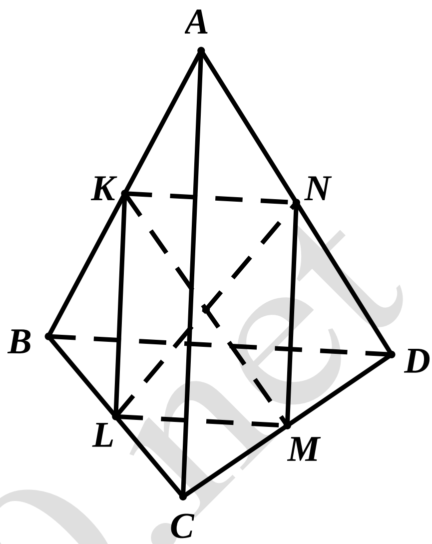
  Tương tự $AD \perp BC, AC \perp BD$.

  Ngược lại, giả sử tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối vuông góc. Gọi AI là đường cao của hình chóp và E là giao điểm của BI và CD. Kẻ $BK \perp AE, K \in AE$, gọi H là giao điểm của AI và BK. Khi đó $CD \perp AB$ và $CD \perp BI \Rightarrow CD \perp BK$.

  Từ đây suy ra $BK \perp (ACD)$. Hay đường cao xuất phát từ các đỉnh A và B cắt nhau tại H. Lập luận tương tự ta được bốn đường cao của tứ diện đôi một cắt nhau, khi đó bốn đường cao hoặc đồng phẳng hoặc đồng quy, mặt khác bốn đường cao của tứ diện thì không thể đồng phẳng nên chúng đồng quy.
- Gọi K,L,M,N theo thứ tự là trung điểm của AB,BC,CD,DA thì $KLMN$ là hình bình hành. Ta thấy $AB \perp CD \Leftrightarrow KLMN$ là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow KM = LN$ (vì hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau khi và chỉ khi nó kaf hình chữ nhật).

Vì vậy ta có đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi các cặp cạnh đối vuông góc $\Leftrightarrow ABCD$ là tứ diện trực tâm (TC1)



- Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Ta chứng minh tổng bình phương của hai cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi cặp cạnh còn lại vuông góc. Thật vậy, giả sử

$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$

$\Leftrightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 + \left|\vec{b} + \vec{c}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^2$

$\Leftrightarrow \vec{a}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD$.

Vậy tứ diện $ABCD$ có tổng bình phương các cặp cạnh đối bằng nhau $\Leftrightarrow$ tứ diện $ABCD$ các cặp cạnh đối vuông góc $\Leftrightarrow$ $ABCD$ là tứ diện trực tâm (TC1).

- Kí hiệu AB là góc phẳng nhị diện cạnh AB. Theo định lí sin trong tứ diện ta có $\dfrac{AB.CD}{\sin AB.\sin CD} = \dfrac{AC.BD}{\sin AC.\sin BD}$ (1).

Mặt khác theo định lí Bretsnây ''Trong tứ diện $ABCD$ với cặp cạnh đối a, b và α, β là góc phẳng nhị diện tương ứng của chúng thì

$a^2 + b^2 + 2ab\cot\alpha\cot\beta = \dfrac{2\left(\sum\limits_{1\le i<j\le 4} S_i^2 S_j^2\right) - \sum\limits_{i=1}^{4} S_i^4}{9V^2}$ (không đổi); trong đó

$S_i\left(i = \overline{1,4}\right)$ là diện tíc các mặt và V là thể tích của tứ diện.''

Ta có $AB^2 + CD^2 + 2AB.CD\cot AB.\cot CD$

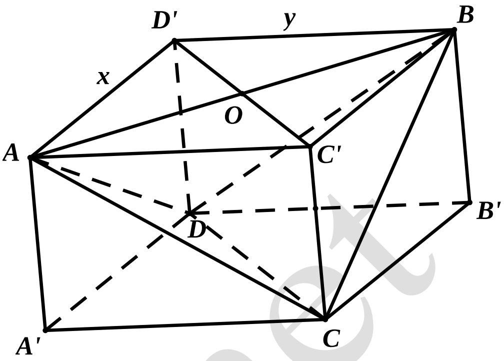
$= AC^2 + BD^2 + 2AC.BD\cot AC.\cot BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\cos AB.\cos CD = \cos AC.\cos BD$

$\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

Từ đó ta có tích các côsin của các góc nhị của các cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi tổng các bình phương của các cặp cạnh đối bằng nhau.Điều này tương đương với $ABCD$ là tứ diện trực tâm đúng theo TC3.

- Ta chứng minh góc giữa các cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi các cặp cạnh đối vuông góc.
  Gọi α là số đo góc giữa hai cạnh đối (của tất cả các cặp cạnh đối) Giả sử $\alpha \neq 90^0$. Ta chứng minh trong ba số $AB.CD\cos\alpha$, $CB.AD\cos\alpha$, $AC.BD\cos\alpha$ có một số bằng tổng của hai số còn lại.Dựng hình hộp ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ mà mỗi mặt của hình hộp đi qua một cạnh và song song với cạnh đối diện (hình vẽ).



  Đặt $AD' = x, D'B = y$, giả sử $x \geq y$ khi đó theo định lí cô sin ta có
  $AD'^2 = OA^2 + OD'^2 - 2OA.OD'\cos(\pi - \alpha) = OA^2 + OD'^2 + 2OA.OD'\cos\alpha$
  hay $4x^2 = AB^2 + CD^2 + 2AB.CD\cos\alpha$ (1).
  Tương tự $4y^2 = AB^2 + CD^2 - 2AB.CD\cos\alpha$ (2). Từ (1) và (2) suy ra
  $AB.CD\cos\alpha = x^2 - y^2$. Thiết lập các hệ thức tương tự nữa ta thu được ba số $AB.CD\cos\alpha$, $CB.AD\cos\alpha$, $AC.BD\cos\alpha$ có một số bằng tổng của hai số còn lại. Giả sử $AB.CD\cos\alpha = AD.BC\cos\alpha + AC.BD\cos\alpha$
  $\Leftrightarrow AB.CD = AD.BC + AC.BD$
  (vô lí theo 3d) §1, công thức Crelle thì $AB.CD, AD.BC, AC.BD$ là ba cạnh của một tam giác). Vậy $\alpha = 90^0$ do đó $ABCD$ có các cặp cạnh đối vuông góc. Theo TC1 ta có điều cần chứng minh.
- Nếu $ABCD$ là tứ diện trực tâm thì dễ dạng chứng minh được chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó.
  Ngược lại nếu chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó thì ta chứng minh được các cặp cạnh đối vuông góc, vì vậy tứ diện này là tứ diện trực tâm(TC3).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

11. Chứng minh trong tứ diện trực tâm các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối đồng quy.

12. Chứng minh rằng trong tứ diện trực tâm:

a) Tất cả các góc phẳng tại một đỉnh hoặc đều nhọn hoặc đều vuông hoặc đều tù.

b) Có ít nhất một mặt là tam giác nhọn.

13. Chứng minh trong tứ diện trực tâm $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$ trong đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp, H là điểm đồng quy của bốn đường cao và d là khoảng cách giữa hai trung điểm của các cặp cạnh đối.

14. Chứng minh rằng trong tứ diện trực tâm các mặt phẳng đi qua trung điểm một cạnh và vuông góc với cạnh đối diện đồng quy tại giao điểm của các đường cao.(Điểm này gọi là điểm Mônggiơ của tứ diện)

15. Chứng minh trong tứ diện trực tâm trọng tâm của các mặt, trực tâm của các mặt và các điểm chia các đoạn nối giao điểm các đường cao với đỉnh, theo tỉ số $2:1$ kể từ đỉnh nằm trên một mặt cầu (mặt cầu 12 điểm)