# TỨ DIỆN

## A. CHUẨN KIẾN THỨC

### A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

**1. Công thức tính đường trọng tuyến.**

Đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện được gọi là đường trọng tuyến của tứ diện.

Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = a, DB = b, DC = c$, $BC = a_1, CA = b_1, AB = c_1$.

Gọi $m_d$ là đường trọng tuyến xuất phát từ đỉnh $D$.

Ta có $m_d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}$.

*Chứng minh*:

Gọi $D_0$ là trọng tâm tam giác $ABC$ và $N$ là trung điểm của $BC$.

Đặt $DN = p, AN = q$, $DD_0N = \varphi$.

Ta có $DN^2 = D_0D^2 + D_0N^2 - 2D_0D.D_0N\cos ND_0D$

$\Rightarrow p^2 = m_d^2 + \frac{q^2}{9} - 2m_d\frac{q}{3}\cos\varphi \quad (1)$

Tương tự $AD^2 = D_0D^2 + D_0A^2 - 2D_0D.D_0A\cos AD_0D$

$\Rightarrow a^2 = m_d^2 + \frac{4}{9}q^2 + 2.\frac{2q}{3}m_d\cos\varphi \quad (2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có

$\Rightarrow 2p^2 + a^2 = 2(m_d^2 + \frac{q^2}{9} - 2m_d\frac{q}{3}\cos\varphi) + m_d^2$

$+\frac{4}{9}q^2 + \frac{4q}{3}m_d\cos\varphi \Rightarrow 3m_d^2 = a^2 + 2p^2 - \frac{2q^2}{3}$

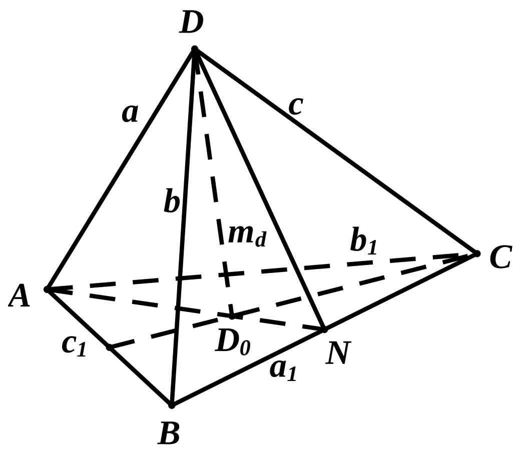
.

Mặt khác $p^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a_1^2}{4}$

và $q^2 = \frac{b_1^2 + c_1^2}{2} - \frac{a_1^2}{4}$ nên

$m_d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}$.

( đpcm).



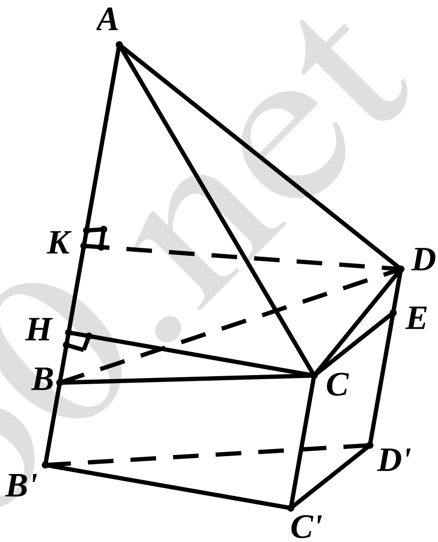
**2. Một số công thức về diện tích.**

**Định lí 1.**

Gọi $S_1, S_2$ là diện tích các mặt $ABC$ và $ABD$, $\alpha$ là góc nhị diện cạnh $AB$, $\varphi$ là góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$. Giả sử $AB = a, CD = b$.

Ta có $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\varphi)^2}{4}$

***Chứng minh:***




Xét mặt phẳng $(P)$ vuông góc với cạnh $AB$ tại $B'$. Gọi $H, K$ là chân đường cao các tam giác $CAB$ và $DAB$.

Chiếu tứ diện lên $(P)$ theo phương $AB$ ta được $A,B,H,K \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto D'$, nên tứ diện $ABCD$ có hình chiếu là tam giác $B'C'D'$.

Ta có

$B'C' = HC = \dfrac{2S_1}{a}$

$B'D' = DK = \dfrac{2S_2}{a}$

và $C'D' = DE = CD\sin\varphi = b\sin\varphi$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác $B'C'D'$ ta có

$C'D'^2 = B'C'^2 + B'D'^2 - 2B'C'.B'D'\cos C'B'D'$.

$\Leftrightarrow \dfrac{4S_1^2}{a^2} + \dfrac{4S_2^2}{a^2} - 2\dfrac{2S_1}{a}.\dfrac{2S_2}{a}\cos\alpha = (b\sin\varphi)^2$

$\Leftrightarrow S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\varphi)^2}{4}$.

**Định lí 2.** Trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ta có :

- $S_1 = S_2\cos\varphi_{1,2} + S_3\cos\varphi_{1,3} + S_4\cos\varphi_{1,4}$ (1).
- $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\varphi_{2,3} - 2S_2S_4\cos\varphi_{3,4} - 2S_3S_4\cos\varphi_{3,4}$ (2).`

Trong đó $\varphi_{i,j}$ là góc nhị diện tao bởi mặt đối diện với đỉnh $A_i$ và các mặt đối diện với đỉnh $A_j$, $S_i$ là diện tích của mặt đối diện với đỉnh $A_i$.

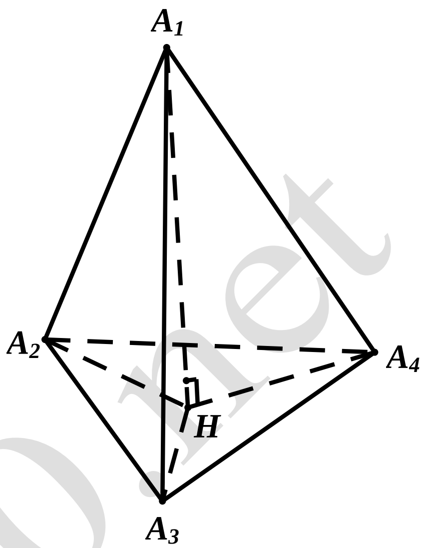
***Chứng minh:***

- Gọi $H$ là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

Theo công thức hình chiếu với chú ý góc giữa hai mặt phẳng bằng hoặc bù với góc gữa hai nhị diện ta có

$S_{HA_3A_4}=S_2|\cos\varphi_{1,2}|, S_{HA_2A_4}=S_3|\cos\varphi_{1,3}|$

$S_{HA_2A_3}=S_4|\cos\varphi_{1,4}|$.




Nếu $\varphi_{1,2}<90^0$ thì H và $A_2$ nằm cùng phía đối với $A_3A_4$ và khi đó $S_{HA_3A_4}=S_2\cos\varphi_{1,2}$.

Nếu $\varphi_{1,2}=90^0\Rightarrow H\in A_3A_4\Rightarrow S_{HA_3A_4}=0$.

Nếu $\varphi_{1,2}>90^0$ thì H và $A_2$ nằm khác phía đối với $A_3A_4$ và khi đó $S_{HA_3A_4}=-S_2\cos\varphi_{1,2}$.

Ta cũng có các kết quả tương tự đối với các tam giác $HA_2A_3$ và $HA_2A_4$.

***Trường hợp 1.***

Cả ba góc $\varphi_{1,j}\le 0$ khi đó

$S_1=S_{HA_2A_3}+S_{HA_3A_4}+S_{HA_2A_4}$

$=S_2\cos\varphi_{1,2}+S_3\cos\varphi_{1,3}+S_4\cos\varphi_{1,4}$.

***Trường hợp 2.***

Có hai góc không tù, chẳng hạn $\varphi_{1,2}\le 90^0,\varphi_{1,3}\le 90^0,\varphi_{1,4}>90^0$ khi đó

$S_1=S_{HA_2A_4}+S_{HA_3A_4}-S_{HA_2A_3}=S_3\varphi_{1,3}+S_2\varphi_{1,2}-\left(-S_4\varphi_{1,4}\right)$

$=S_2\cos\varphi_{1,2}+S_3\cos\varphi_{1,3}+S_4\cos\varphi_{1,4}$.

***Trường hợp 3.***

Có một góc không tù , chẳng hạn $\varphi_{1,2}\le 90^0$ khi đó

$S_1=S_{HA_3A_4}-S_{HA_2A_4}-S_{HA_2A_3}=S_2\varphi_{1,2}-(-S_3\varphi_{1,3})-\left(-S_4\varphi_{1,4}\right)$

$=S_2\cos\varphi_{1,2}+S_3\cos\varphi_{1,3}+S_4\cos\varphi_{1,4}$.

Rõ ràng không thể có trường hợp cả ba góc không nhọn do đó ta có (đpcm)

**Lưu ý:** Có thể chứng minh công thức $(1)$ cách sử dụng phương pháp vec tơ và định lí con nhím như sau.

Gọi $\overrightarrow{e_i}\ (i=1,2,3,4)$ là các vec tơ đơn vị vuông góc với mặt đối diện của đỉnh $A_i$ thì ta có $S_1\overrightarrow{e_1}+S_2\overrightarrow{e_2}+S_3\overrightarrow{e_3}+S_4\overrightarrow{e_4}=\vec{0}$

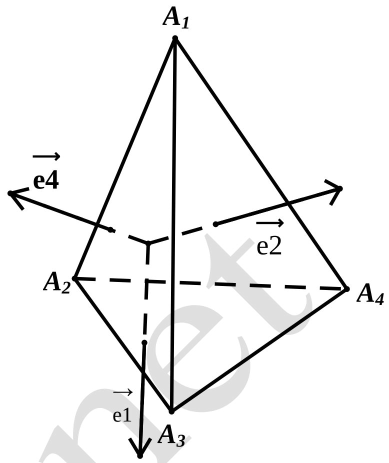
$\Leftrightarrow S_1\overrightarrow{e_1} = -\left(S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} + S_4\overrightarrow{e_4}\right)$.

Nhân vô hướng hai vế với $\overrightarrow{e_1}$ và lưu ý

$\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_j}\right) + \varphi_{1,j} = 180^0 \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_j}\right) = -\cos\varphi_{1,j}$

$(j = 2,3,4)$ ta được

$S_1 = S_2\cos\varphi_{1,2} + S_3\cos\varphi_{1,3} + S_4\cos\varphi_{1,4}$ .




- Ta chứng minh công thức (2) bằng PP vec tơ,ta có

  $S_1\overrightarrow{e_1} + S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} + S_4\overrightarrow{e_4} = \vec{0}$

  $\Leftrightarrow S_1\overrightarrow{e_1} = -\left(S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} + S_4\overrightarrow{e_4}\right)$

  Bình phương vô hướng kết hợp với

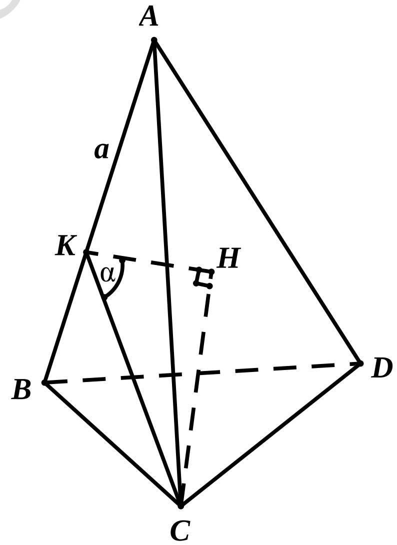
  $\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{e_i};\overrightarrow{e_j}\right) = -\cos\varphi_{i,j} (i \neq j, i,j = 2,3,4)$ ta có

  điều phải chứng minh.

**3. Một số công thức về thể tích của tứ diện.**

**3. 1.** Gọi $S_1, S_2$ là diện tích các mặt $ABC$ và $ABD$, $\alpha$ là góc nhị diện cạnh $AB = a$. Thì thể tích tứ diện $ABCD$ là

$V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$




***Chứng minh:***

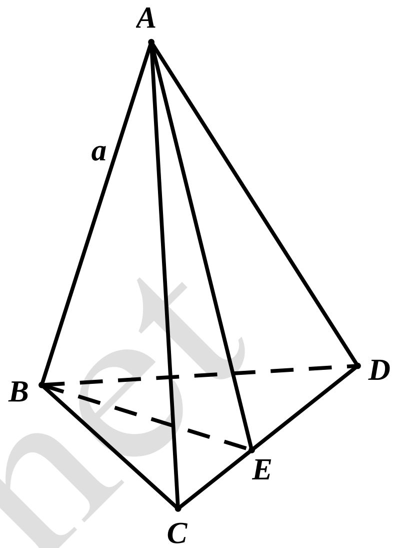
Gọi $H$ là chân đường cao hạ từ $C$ của tứ diện, kẻ $HK \perp AB$ thì $\widehat{CHK} = \alpha$.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}CH.S_2$, mà

$CH = CK\sin\alpha = \dfrac{2S_1\sin\alpha}{a}$.

Suy ra $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

**Hệ quả:**
Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh $AB$ cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích $S=\frac{2S_1S_2}{S_1+S_2}\cos\frac{\alpha}{2}$




***Chứng minh:***
Gọi $E$ là giao điểm của mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh $AB$, ta có

$V_{ABCD}=V_{ABEC}+V_{ABED}$

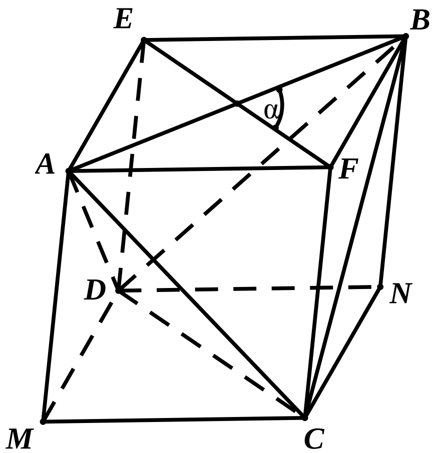
$$\Leftrightarrow \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}=\frac{2S_1S\sin\frac{\alpha}{2}}{3a}+\frac{2S_2S\sin\frac{\alpha}{2}}{3a}$$

$$\Leftrightarrow 2S_1S_2\cos\frac{\alpha}{2}=\left(S_1+S_2\right)S \Leftrightarrow S=\frac{2S_1S_2\cos\frac{\alpha}{2}}{S_1+S_2}$$

(đpcm).

**3.2.** Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V=\frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\varphi$, trong đó $d$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$, $\varphi$ là góc giữa chúng.

***Chứng minh:***
Dựng hình hộp $AEBF.CMDN$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ( như hình vẽ).




Ta có $EF // CD$ nên $\left(AB,EF\right)=\left(AB,CD\right)=\alpha$.

Vì $AEBF$ là hình bình hành nên

$S_{AEBF}=\frac{1}{2}AB.EF\sin\alpha=\frac{1}{2}AD.CD\sin\alpha$

Do đường cao của hình hộp là

$h=d\left(\left(AEBF\right),\left(CMDN\right)\right)$

$=d\left(AB,CD\right)=d$

nên thể tích khối hộp là $V_{hh}=\frac{1}{2}AD.CD.d\sin\alpha$.

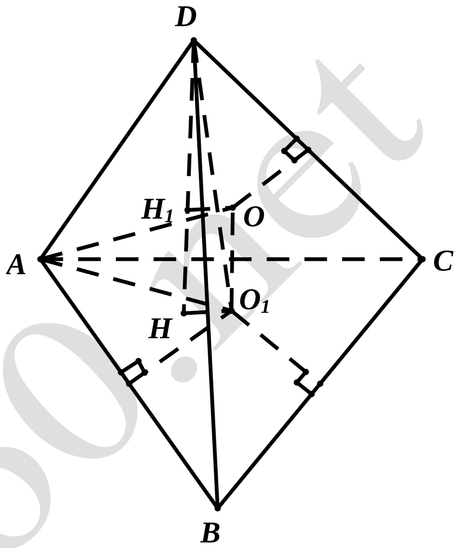
Dễ thấy $V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{hh}=\frac{1}{6}AB.AD.d\sin\alpha$ ( đpcm).

**3.3.** Gọi $S_i, R_i$ và $l_i$ $(i=1,4)$ là diện tích các mặt, bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đó và khoảng cách từ tâm các đường tròn đó đến các đỉnh đối diện của tứ diện thì $V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)}{2}}$

***Chứng minh:***

Trước tiên ta xét tâm mặt cầu ngoại tiếp nằm trong tứ diện.

Gọi $R_1, h_1, l_1, d_1$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, đường cao $DH$, và khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ đến $d$. Gọi $O, O_1$ lần lượt là tâm mặt cầu và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, $H_1$ là hình chiếu của $O$ trên $DH$. Đặt $OO_1=d_1$ và $R$ là bán kính mặt cầu.




Ta có $O_1H^2=O_1D^2-DH^2=l_1^2-h_1^2$

$OH_1^2=OD^2-DH_1^2=R^2-\left(h_1-d_1\right)^2$

$R^2-d_1^2+2h_1d_1-h_1^2$. Vì $O_1H=OH_1$

nên $R^2-d_1^2+2h_1d_1-h_1^2=l_1^2-h_1^2 \Leftrightarrow l_1^2-R^2+d_1^2=2h_1d_1$.

Lại có $R^2-d_1^2=OA^2-OO_1^2=AO_1^2=R_1^2$ nên $l_1^2-R_1^2=2h_1d_1$.

Tương tự $l_i^2-R_i^2=2h_id_i\left(i=2,3,4\right)$.

Do đó $\sum_{i=1}^{4}S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)=\sum_{i=1}^{4}2S_i^2h_id_i=\sum_{i=1}^{4}2\left(S_ih_i\right)^2\left(\frac{d_i}{h_i}\right)=\sum_{i=1}^{4}18V^2\left(\frac{d_i}{h_i}\right)$

Mà $\sum_{i=1}^{4}\frac{d_i}{h_i}=1$ nên $V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)}{2}}$.

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích $V$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện bằng $R$.Chứng minh rằng $AB.CD;\ AC.DB;\ AD.BC$ là số đo ba cạnh của một tam giác nào đó. Gọi $S$ là diện tích tam giác đó. Chứng minh $S=6VR$ (công thức Crelle)

***Chứng minh:***

Gọi $O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và $A'$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$.$H$ là trung điểm của $AO$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng qua $H$ và vuông

góc với $AO$, $B',C',D'$ lần lượt là giao điểm của $(P)$ với $AB,AC,AD$.Ta có các tam giác vuông $AHB',ABA'$ đồng dạng nên $\frac{AB'}{AH}=\frac{AA'}{AB}\Rightarrow AB.AB'=AH.AA'$
$=\frac{1}{2}R.2R=R^2\Rightarrow AB.AB'=R^2$.

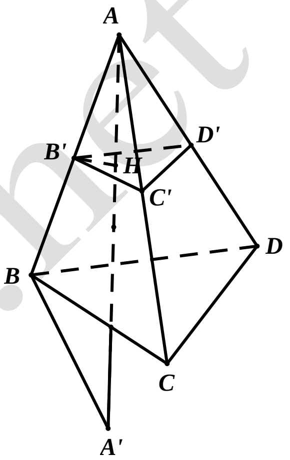
Tương tự ta có : $AC.AC'=AD.AD'=R^2$

$\Rightarrow AB.AB'=AC.AC'=AD.AD'$

$\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$

$\Rightarrow B'C'=\frac{BC.AC'}{AB}=\frac{BC.AC'.AC.AD}{AB.AC.AD}=\frac{AD.BC.R^2}{AB.AC.AD}$

$\Rightarrow \frac{B'C'}{AD.BC}=\frac{R^2}{AB.AC.AD}$.




Tương tự ta có:

$\frac{B'C'}{AD.BC}=\frac{C'D'}{AB.CD}=\frac{D'B'}{AC.DB}=\frac{R^2}{AB.AC.AD}$

Vậy là 3 cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác $A'B'C'$.

Ta có $\frac{S}{S_{\Delta B'C'D'}}=\left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2$

$\Rightarrow S=\left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2 S_{\Delta B'C'C'}=\left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2.\frac{3V_{A.B'C'D'}}{AH}$

$=6\frac{(AB.AC.AD)^2}{R^5}.\frac{V_{A.B'C'D'}}{V_{A.BCD}}.V_{ABCD}=6\frac{(AB.AC.AD)^2}{R^5}\frac{AB'AC'AD'}{AB.AC.AD}.V$

$=6\frac{(AB.AB')(AC.AC')(AD.AD')}{R^5}V=6\frac{R^6}{R^5}V=6VR$.

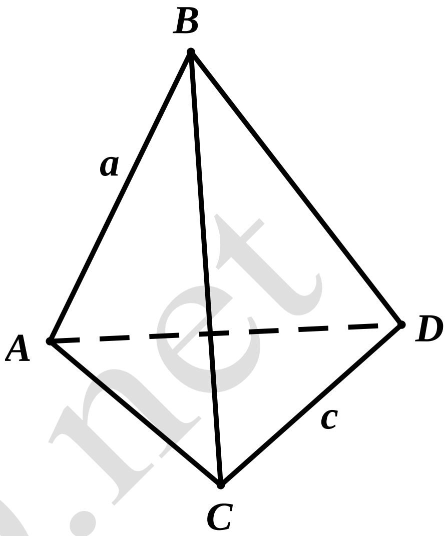
**4. Định lí sin trong tứ diện**

Cho tứ diện $ABCD$, có $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d,AC=e,BD=f$ Gọi $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varphi,\lambda$ lần lượt là góc nhị diện các cạnh $AB,BC,CD,DA,AC,BD$

thì $\dfrac{ac}{\sin\alpha\sin\gamma}=\dfrac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\dfrac{ef}{\sin\varphi\sin\lambda}$

***Chứng minh:***

Đặt $S_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh $A,B,C,D$.




Ta có $V=\dfrac{2S_3S_4\sin\alpha}{3a}$ và $V=\dfrac{2S_1S_2\sin\gamma}{3c}$

$\Rightarrow\dfrac{4S_1S_2S_3S_4\sin\alpha\sin\gamma}{9ac}=V^2$

$\Rightarrow\dfrac{ac}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$.

Tương tự

$\dfrac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$ $\dfrac{ef}{\sin\varphi\sin\lambda}=\dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$

.

Vậy $\dfrac{ac}{\sin\alpha\sin\gamma}=\dfrac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\dfrac{ef}{\sin\varphi\sin\lambda}$.