TỨ DIỆN GẦN ĐỀU

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau được gọi là tứ diện gần đều.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta thấy tứ diện gần đều có bốn mặt là các tam giác bằng nhau.

2. Một số điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện gần đều.

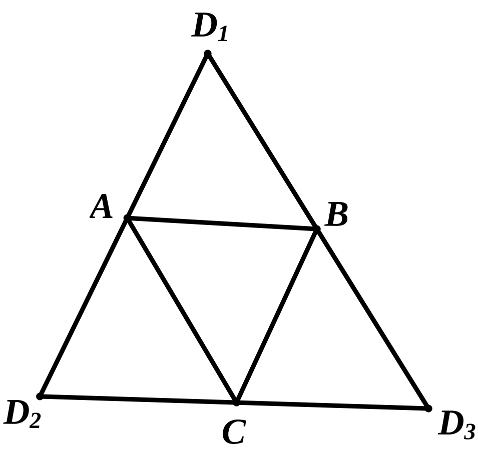
Mỗi điều kiện sau đây đều là một điều kiện cần và đủ để một tứ diện gần đều.

- Tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh bằng 180^0
- Mỗi đường nối trung điểm của các cặp cạnh đối là đường vuông góc chung của cặp cạnh tương ứng đó.
- Bốn mặt của tứ diện là các tam giác có diện tích bằng nhau.
- Tứ diện có hai trục đối xứng.
- Bốn đương cao của tứ diện bằng nhau.
- Tâm mặt cầu nội tiếp và tâm mặt cầu ngoại tiếp bằng nhau.
- Tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau.
- Tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm trùng nhau.
- Tổng cô sin của các nhị diện chứa cùng một mặt bằng của tứ diện bằng 1
- Góc nhị diện của các cặp cạnh đối bằng nhau.

Chứng minh:

- Nếu $ABCD$ là tứ diện gần đều thì dễ dàng chứng minh được tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh bằng 180^0. Giả sử ngược lại, tứ tứ diện $ABCD$ có tổng các góc ở mỗi đỉnh bằng 180^0, trải các mặt chứa D của tứ diện lên (ABC).

  Giả sử các mặt DAB, DBC, DAC khi trải xuông (ABC) ta được các mặt $(D_1AB),(D_2BC),(D_3AC)$. Dễ

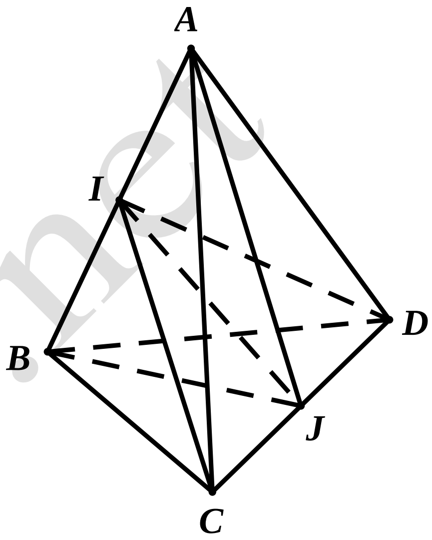


thấy tổng các góc ở mỗi định bằng 180^0 nên các điểm A, B, C thuộc các cạnh của tam giác $D_1D_2D_3$.

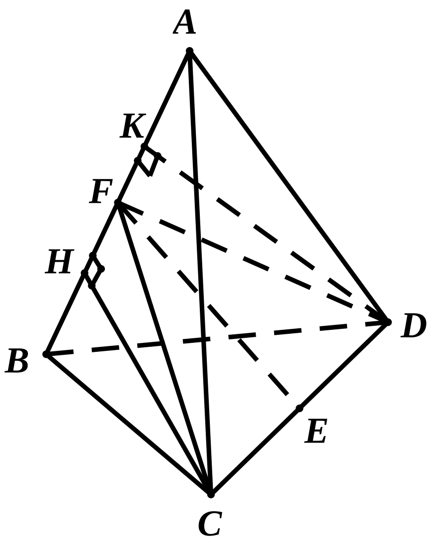
Ta có $D_1A = DA = D_2A$, $BD_1 = BD_3 = BD$, $CD_2 = CD_3 = CD$ nên A, B, C lần lượt là trung điểm của D_1D_2, D_1D_3, D_2D_3 do đó

$AB = \frac{1}{2}D_2D_3 = CD_2 = CD$; tương tự

$AC = BD, AD = BC$. Vậy $ABCD$ là tứ diện gần đều.

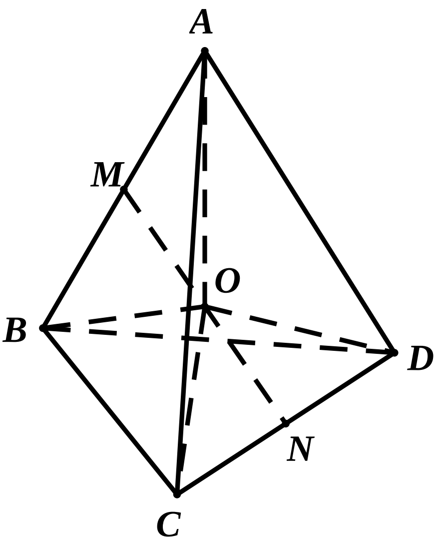


- Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều và I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, CD.
  Do $AB = CD, AC = BD, BC = AD$ nên $\Delta ABC = \Delta ABD \Rightarrow IC = ID$, từ đó ta có $IJ \perp CD$, tương tự $IJ \perp AB$ hay IJ là đường vuông góc chung của AB và CD. Lí luận tương tự ta được đoạn thẳng nối trung điểm của haicặp cạnh đối còn lại cũng là đường vuông góc chung của chúng.
  Đảo lại, giả sử đoạn IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD, khi đó IJ là đường trung trực của AB và CD nên phép đối xứng trục qua IJ biến $A \to B, C \to D \Rightarrow AC \to BD$ $\Rightarrow AC = BD$, tương tự ta cũng có $AD = BC, AB = CD$ nên $ABCD$ là tứ diện gần đều.
- Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều thì các mặt của nó là các tam giác bằng nhau nên có diện tích bằng nhau.
  Ngược lại, giả sử tứ diện $ABCD$ có các mặt có diện tích bằng nhau.
  Gọi E là trung điểm của CD, H, K, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, D, E trên AB. Ta có E là trung điểm của CD nên F là trung điểm của HK, mặt khác
  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CH, S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AB.DK$,
  $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} \Rightarrow CH = DK$ suy ra hai tam giác vuông ΔCHF và ΔDKF bằng nhau, do đó $CF = DF \Rightarrow \Delta FCD$



cân tại $F \Rightarrow FE \perp CD$, vậy đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.
Do vai trò bình đẳng giữa AB và CD nên F cũng là trung điểm của AB.
Vậy EF là trục đối xứng của tứ diện $ABCD$ nên $AC = BD, AD = BC$.
Tưng tự $AB = CD$, vì vậy $ABCD$ là tứ diện gần đều.

- Hiển nhiên mỗi trục đối xứng phải đi qua trung điểm của một cặp cạnh đối nên nó là đường vuông góc chung của cặp cạnh đối đó theo tính chất 2 ta có (đpcm).
- Nếu $ABCD$ là tứ diện gần đều thì theo tính chất 3 ta có diện tích các mặt bằng nhau, áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}hS_d$ ta có ngay bốn đường cao của tứ diện bằng nhau.
  Ngược lại nếu tứ diện có bốn đường cao bằng nhau thì cũng từ công thức $V = \frac{1}{3}hS_d$ ta có diện tích bốn mặt của bằng nhau, theo tính chất 3 ta cũng có đpcm.
- Giả sử O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều $ABCD$ ta sẽ chứng minh O cũng là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$. Thật vậy, gọi O_1, O_2 lần lượt là hình chiếu của O trên các mặt ABC và DBC, khi đó O_1, O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DBC. Gọi I là trung điểm của BC.Ta có $\Delta ABC = \Delta DBC$ $\Rightarrow O_1I = O_2I$, $OO_1 = OO_2$. Tương tự ta sẽ chứng minh được O cách đều các mặt của tứ diện, do đó O là tâm mặt cầu nội tiếp.Ngược lại, giả sử tứ diện $ABCD$ có tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau. Gọi O_1, O_2 là các tiếp diểm của mặt cầu nội tiếp với các mặt ABC và DBC thì O_1, O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DBC và $\Delta O_1BC = \Delta O_2BC \Rightarrow BO_1C = BO_2C$ $\Rightarrow BAC = BDC$. Hoàn toàn tương tự ta có $CAD = CBD$, $BAD = BCD$ suy ra tổng các góc phẳng tại đỉnh A của tứ diện $ABCD$ bằng 180^0, và điều này đúng cho tất cả các đỉnh của tứ diện, vì vậy theo tính chất 1 thí $ABCD$ là tứ diện gần đều.



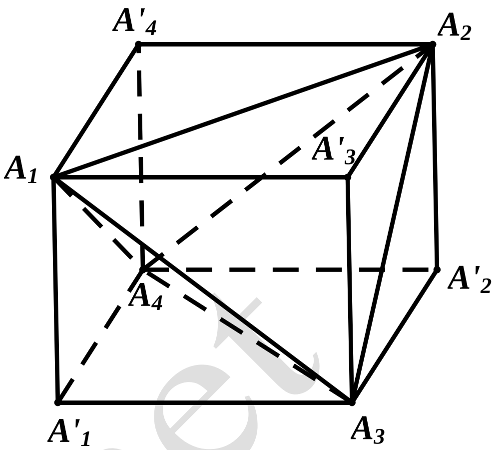
- Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều, gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của MN thì O là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Ta chứng minh O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
  Thật vậy, ta có MN là đường trung trực của AB và CD nên
  $OA=OB,OC=OD$, lại có $OA=\sqrt{MA^2+OM^2}=\dfrac{\sqrt{AB^2+MN^2}}{2}$

$$OD=\sqrt{ON^2+ND^2}=\frac{\sqrt{CD^2+MN^2}}{2}$$

  Mà $AB=CD\Rightarrow OA=OD$, vậy $OA=OB=OC=OD$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
  Ngược lại nếu tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau thì đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối chính là đường vuông góc chung của chúng nên theo tính chất 2 ta có đpcm.
- Tính chất này được suy ra từ hai tính chất 6 và 7.
- Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều khi đó theo Định lí 2 §2 ta có $S_{ABC}=S_{DAB}\cos\alpha+S_{DBC}\cos\beta+S_{DAC}\cos\gamma$ trong đó α,β,γ lần lượt là góc nhị diện các cạnh AB,BC,AC. Mặt khác $S_{ABC}=S_{DAB}=S_{DBC}=S_{DAC}$ nên $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.
  Ngược lại, giả sử ABC là mặt có diện tích lớn nhất và $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$ với α,β,γ lần lượt là góc nhị diện các cạnh AB,BC,AC khi đó từ $S_{ABC}=S_{DAB}\cos\alpha+S_{DBC}\cos\beta+S_{DAC}\cos\gamma$
  $\Rightarrow S_{ABC}\le S_{ABC}\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right)=S_{ABC}$
  do đó $S_{ABC}=S_{DAB}=S_{DBC}=S_{DAC}\Rightarrow ABCD$ là tứ diện gần đều.
- Giả sử $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện gần đều S_1,S_2,S_3,S_4 là diện tích các mặt đối diện với đỉnh A_i. Gọi α,β lần lượt là góc phẳng nhị diện cạnh A_1A_2 và A_3A_4.
  Dựng hình hộp $A_1A_4'A_2A_3'.A_1'A_3A_2'A_4$.
  Gọi S là diện tích các mặt của tứ diện

Áp dụng công thức

$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\varphi)^2}{4}$ (Các giả thiết trọng định lí 1, §1,chuyên đề 2) ta có diện tích hình chữ nhật $A_1A_4^{'}A_2A_3^{'}$ là $S'^2 = 2S^2 - 2S^2\cos\alpha$ và diện tích hình chữ nhật $A_1^{'}A_3A_2^{'}A_4$ là $S''^2 = 2S^2 - 2S^2\cos\beta$ mà $S' = S'' \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (do $0^0 < \alpha, \beta < 180^0$).



Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được góc phẳng nhị diện của các cặp cạnh đối còn lại bằng nhau.

Ngược lại,giả sử tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có góc nhị diện các cặp cạnh đối bằng nhau, khi đó áp dụng công thức $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$ (§1chuyên đề 2) ta có $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \Rightarrow$ ABCD là tứ diện gần đều (TC3).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

5. Chứng minh rằng trong tứ diện gần đều tổng côsin của các góc nhị diện bằng 2.

6. Tính thể tích của tứ diện gần đều $ABCD$ có các cạnh $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = AD = c$.

7. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều $ABCD$ có các cạnh $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = AD = c$.

8. Cho tứ diện $ABCD$ có $BAC = ABD = ACD = BDC$. Chứng minh $ABCD$ là tứ diện gần đều.

9. Chứng minh trong tứ diện gần đều tất cả các góc phẳng đều nhọn.

10. Cho tứ diện gần đều $OABC$ có α, β, γ là các góc nhị diện của các cạnh thuộc mặt ABC với $\left(0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^0\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \cos\alpha + \sqrt{\cos\alpha\cos\beta} + \sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.