

CHUYÊN ĐỀ 1
BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 1. Cho bất đẳng thức $|a-b| \leq |a|+|b|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

- A. $a = b$. B. $ab \leq 0$. C. $ab \geq 0$. D. $ab = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + 3|x|$ với $x \in \mathbb{R}$ là:

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0. D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left. \begin{matrix} x^2 \geq 0 \\ |x| \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^2 + 3|x| \geq 0$.

Câu 3. Cho biểu thức $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f(x) \geq 0$ và $f(1) = 0$; $f(x) \leq 1$ và $f(0) = 1$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0, giá trị lớn nhất bằng 1.
B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.
C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất bằng 2.
D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $0 < f(x) \leq 1; \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Vậy $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 5. Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số a và b

- A. có giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$. B. có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.
C. có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$. D. không có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì a và b là hai số bất kì nên không xác định được giá trị lớn nhất của tích ab .

Câu 6. Cho ba số $a; b; c$ thỏa mãn đồng thời: $a+b-c > 0$; $b+c-a > 0$; $c+a-b > 0$. Để ba số $a; b; c$ là ba cạnh của một tam giác thì cần thêm điều kiện gì?

Câu 13. Cho biểu thức $P = -a + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$. B. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$.
 C. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$. D. P đạt giá trị lớn nhất tại $a = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } P = -a + \sqrt{a} = -(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

- A. $\frac{11}{4}$. B. $\frac{4}{11}$. C. $\frac{11}{8}$. D. $\frac{8}{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } x^2 - 5x + 9 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}; \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9} \leq \frac{8}{11}. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng } \frac{8}{11}.$$

Câu 15. Cho $f(x) = x - x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$. B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.
 C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$. D. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$f(x) = x - x^2 = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \text{ và } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Câu 16. Bất đẳng thức $(m+n)^2 \geq 4mn$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

- A. $n(m-1)^2 - m(n-1)^2 \geq 0$. B. $m^2 + n^2 \geq 2mn$.
 C. $(m+n)^2 + m - n \geq 0$. D. $(m-n)^2 \geq 2mn$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$(m+n)^2 \geq 4mn \Leftrightarrow m^2 + 2mn + n^2 \geq 4mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 \geq 2mn.$$

Câu 17. Với mọi $a, b \neq 0$, ta có bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- A. $a - b < 0$. B. $a^2 - ab + b^2 < 0$. C. $a^2 + ab + b^2 > 0$. D. $a - b > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2a \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0; \forall b \neq 0.$$

Câu 18. Với hai số x, y dương thoả $xy = 36$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 12$. B. $x + y \geq 2xy = 72$. C. $4xy \leq x^2 + y^2$. D. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy = 36$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 24. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Một học sinh làm như sau:

I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$ (1)

II) (1) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

III) và $(a-b)^2 \geq 0$ đúng $\forall a, b > 0$ nên $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Cách làm trên :

A. Sai từ I).

B. Sai từ II).

C. Sai ở III).

D. Cả I), II), III) đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 25. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức sau:

I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

II) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

III) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Bất đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ I) đúng.

B. Chỉ II) đúng.

C. Chỉ III) đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \Rightarrow$ (I) đúng; $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \Rightarrow$ (II) đúng;

$$\left. \begin{array}{l} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \end{array} \right\} \Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Rightarrow$$
 (III) đúng.

Câu 26. Cho các bất đẳng thức: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (I), $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ (II), $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (III) (với $a, b, c > 0$). Bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức trên là đúng?

A. chỉ I đúng.

B. chỉ II đúng.

C. chỉ III đúng.

D. I, II, III đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \Rightarrow$ (I) đúng; $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \Rightarrow$ (II) đúng;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \\ a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \end{array} \right. \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow$$
 (III) đúng.

Câu 27. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

I) $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

II) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

III) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 9$.

Bất đẳng thức nào đúng:

A. Chỉ I) và II) đúng.

B. Chỉ I) và III) đúng.

C. Chỉ I) đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

• $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow$ (I) đúng;

- $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \\ a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow (II) \text{ đúng};$
- $a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; c+a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow (III) \text{ sai}.$

Câu 28. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

I) $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8.$ II) $\left(\frac{2}{a} + b + c\right)\left(\frac{2}{b} + c + a\right)\left(\frac{2}{c} + a + b\right) \geq 64.$

III) $a+b+c \leq abc$. Bất đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ I) đúng.

B. Chỉ II) đúng.

C. Chỉ I) và II) đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}; 1 + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}; 1 + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8\sqrt{\frac{abc}{bca}} = 8 \Rightarrow (I) \text{ đúng}.$$

$$\frac{1}{a} + b \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}; \frac{1}{a} + c \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{2}{a} + b + c \geq 2\sqrt{4\frac{bc}{a^2}} = 4\sqrt{\frac{bc}{a^2}}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2}{b} + c + a \geq 4\sqrt{\frac{ac}{b^2}}; \frac{2}{c} + a + b \geq 4\sqrt{\frac{ab}{c^2}}.$$

$$\text{Suy ra: } \left(\frac{2}{a} + b + c\right)\left(\frac{2}{b} + c + a\right)\left(\frac{2}{c} + a + b\right) \geq 64 \Rightarrow (II) \text{ đúng}.$$

$$\text{Ta có: } 3\sqrt[3]{abc} \leq a+b+c \leq abc \Leftrightarrow \sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Leftrightarrow abc \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow (III) \text{ sai}.$$

Câu 29. Cho $x, y, z > 0$ và xét ba bất đẳng thức (I) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$; (II) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{9}{x+y+z}$; (III)

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3. \text{ Bất đẳng thức nào là đúng?}$$

A. Chỉ I đúng.

B. Chỉ I và III đúng.

C. Chỉ III đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} = 3xyz \Rightarrow (I) \text{ đúng};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \\ x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x+y+z) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow (II) \text{ sai};$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 3 \Rightarrow (III) \text{ đúng}.$$

Câu 30. Cho $a, b > 0$ và $ab > a+b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=4$.

B. $a+b > 4$.

C. $a+b < 4$.

D. $a+b \leq 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có: } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } ab > a+b &\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} > a+b \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) > 0 \Leftrightarrow (a+b)(a+b-4) > 0 \\ &\Leftrightarrow a+b-4 > 0 \text{ (vì } a+b > 0) \Leftrightarrow a+b > 4. \end{aligned}$$

Câu 31. Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$, $z = (a+d)(b+c)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x < y < z$. B. $y < x < z$. C. $z < x < y$. D. $x < z < y$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x - y &= (a+b)(c+d) - (a+c)(b+d) = a(c+d) + b(c+d) - a(b+d) - c(b+d) \\ &= a(c-b) + bd - cd = (d-a)(b-c) < 0. \end{aligned}$$

Suy ra: $x < y$.

$$\text{Tương tự: } x - z = (a-c)(d-b) < 0 \Rightarrow x < z; \quad y - z = (a-b)(d-c) < 0 \Rightarrow y < z.$$

Câu 32. Với $m, n > 0$, bất đẳng thức: $mn(m+n) < m^3 + n^3$ tương đương với bất đẳng thức

- A. $(m+n)(m^2 + n^2) \geq 0$. B. $(m+n)(m^2 + n^2 + mn) \geq 0$.
C. $(m+n)(m-n)^2 > 0$. D. Tất cả đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} mn(m+n) < m^3 + n^3 &\Leftrightarrow m^2n - m^3 + mn^2 - n^3 < 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2(m-n) + n^2(m-n) < 0 \Leftrightarrow (m-n)^2(m+n) > 0. \end{aligned}$$

Câu 33. Bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$, $\forall a, b, c, d$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

- A. $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{e}{2}\right)^2 \geq 0$.
B. $\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$.
C. $\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e + \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$.
D. $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &\geq a(b+c+d+e) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ae + e^2\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e - \frac{a}{2}\right)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Câu 34. Cho $x, y > 0$. Tìm bất đẳng thức sai?

- A. $(x+y)^2 \geq 4xy$. B. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{4}{x+y}$.
C. $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$. D. $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = y.$$

Câu 35. Cho $x^2 + y^2 = 1$, gọi $S = x + y$. Khi đó ta có

- A. $S \leq \sqrt{2}$. B. $S \geq \sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}$. D. $-1 \leq S \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $1 = x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 2xy \leq 1$.

Mặt khác: $S^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}$.

Câu 36. Cho x, y là hai số thực thay đổi sao cho $x + y = 2$. Gọi $m = x^2 + y^2$. Khi đó ta có:

- A. giá trị nhỏ nhất của m là 2. B. giá trị nhỏ nhất của m là 4.
C. giá trị lớn nhất của m là 2. D. giá trị lớn nhất của m là 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$.

Do đó: $m = x^2 + y^2 = x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2 \geq 2; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là 2.

Câu 37. Với mỗi $x > 2$, trong các biểu thức: $\frac{2}{x}$, $\frac{2}{x+1}$, $\frac{2}{x-1}$, $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x}{2}$ giá trị biểu thức nào là nhỏ nhất?

- A. $\frac{2}{x}$. B. $\frac{2}{x+1}$. C. $\frac{2}{x-1}$. D. $\frac{x}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\frac{2}{x+1} < \frac{2}{x} < \frac{2}{x-1}$ và $\frac{x}{2} < \frac{x+1}{2}$.

Mặt khác: $\frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2 + x - 4}{2(x+1)} = \frac{(x-2)(x+2) + x}{2(x+1)} > 0; \forall x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > \frac{2}{x+1}$.

Câu 38. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là

- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 39. Cho $x \geq 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

- A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f(x) \geq 0$ và $[f(x)]^2 = \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{8} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ với $x > 0$ là

A. 2.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f(x) = 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$.

Câu 41. Với $a, b, c > 0$. Biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < P \leq \frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{2} < P$.

C. $\frac{4}{3} \leq P$.

D. $\frac{3}{2} \leq P$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $P+3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ suy ra: $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

Do đó $P+3 \geq \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$; đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.