

**CHUYÊN ĐỀ 1
BẤT ĐẲNG THỨC**

Câu 1. Cho bất đẳng thức $|a-b| \leq |a| + |b|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

- A. $a=b$. B. $ab \leq 0$. C. $ab \geq 0$. D. $ab=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + 3|x|$ với $x \in \mathbb{R}$ là:

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0. D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ |x| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3|x| \geq 0$.

Câu 3. Cho biểu thức $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f(x) \geq 0$ và $f(1) = 0$; $f(x) \leq 1$ và $f(0) = 1$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0, giá trị lớn nhất bằng 1.
B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.
C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất bằng 2.
D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $0 < f(x) \leq 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Vậy $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 5. Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số a và b

- A. có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{9}{4}$. B. có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.
C. có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$. D. không có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì a và b là hai số bất kì nên không xác định được giá trị lớn nhất của tích ab .

Câu 6. Cho ba số a ; b ; c thoả mãn đồng thời: $a+b-c > 0$; $b+c-a > 0$; $c+a-b > 0$. Để ba số a ; b ; c là ba cạnh của một tam giác thì cần thêm điều kiện gì?

-
- | | |
|--|---------------------------------|
| A. Cân có cả $a, b, c \geq 0$. | B. Cân có cả $a, b, c > 0$. |
| C. Chỉ cần một trong ba số a, b, c dương | D. Không cần thêm điều kiện gì. |

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 7. Trong các hình chữ nhật có cùng chi vi thì

- A. Hình vuông có diện tích nhỏ nhất.
- B. Hình vuông có diện tích lớn nhất.
- C. Không xác định được hình có diện tích lớn nhất.
- D. Cả A, B, C đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ý nghĩa hình học của bất đẳng thức Cô si.

Câu 8. Tìm mệnh đề đúng?

- | | |
|---|--|
| A. $a < b \Rightarrow ac < bc$. | B. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. |
| C. $a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$. | D. $a < b \Rightarrow ac < bc, (c > 0)$. |

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 9. Suy luận nào sau đây đúng?

- | | |
|---|---|
| A. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$. | B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. |
| C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$. | D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$. |

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 10. Trong các tính chất sau, tính chất nào sai?

- | | |
|---|---|
| A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$. | B. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$. |
| C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$. | D. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$. |

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 11. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- | | | |
|--|----------------------------------|--|
| A. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. | B. $a < b \Rightarrow ac < bc$. | C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$. D. Cả A, B, C đều sai. |
|--|----------------------------------|--|

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây sai?

- | | |
|--|---|
| A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$. | B. $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$. |
| C. $\begin{cases} a \leq b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$. | D. $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b. (c > 0)$ |

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 13. Cho biểu thức $P = -a + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- | | |
|---|--|
| A. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$. | B. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$. |
| C. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$. | D. P đạt giá trị lớn nhất tại $a = \frac{1}{4}$. |

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } P = -a + \sqrt{a} = -(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| A. $\frac{11}{4}$. | B. $\frac{4}{11}$. | C. $\frac{11}{8}$. | D. $\frac{8}{11}$. |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } x^2 - 5x + 9 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}; \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9} \leq \frac{8}{11}. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng } \frac{8}{11}.$$

Câu 15. Cho $f(x) = x - x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- | | |
|--|---|
| A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$. | B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$. |
| C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$. | D. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$. |

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$f(x) = x - x^2 = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \text{ và } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Câu 16. Bất đẳng thức $(m+n)^2 \geq 4mn$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

- | | |
|--|----------------------------------|
| A. $n(m-1)^2 - m(n-1)^2 \geq 0$. | B. $m^2 + n^2 \geq 2mn$. |
| C. $(m+n)^2 + m - n \geq 0$. | D. $(m-n)^2 \geq 2mn$. |

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$(m+n)^2 \geq 4mn \Leftrightarrow m^2 + 2mn + n^2 \geq 4mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 \geq 2mn.$$

Câu 17. Với mọi $a, b \neq 0$, ta có bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- | | | | |
|-------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| A. $a - b < 0$. | B. $a^2 - ab + b^2 < 0$. | C. $a^2 + ab + b^2 > 0$. | D. $a - b > 0$. |
|-------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------|

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2a \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0; \forall b \neq 0.$$

Câu 18. Với hai số x, y dương thoả $xy = 36$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- | | | | |
|--|-----------------------------------|----------------------------------|---|
| A. $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 12$. | B. $x + y \geq 2xy = 72$. | C. $4xy \leq x^2 + y^2$. | D. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy = 36$. |
|--|-----------------------------------|----------------------------------|---|

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm x, y . Ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{36} = 12$.

Câu 19. Cho hai số x, y dương thoả $x + y = 12$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{xy} \leq 6$.

B. $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 36$.

C. $2xy < x^2 + y^2$.

D. $\sqrt{xy} \geq 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm x, y . Ta có: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 6$.

Câu 20. Cho x, y là hai số thực bất kỳ thoả và $xy = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm x^2 và y^2 . Ta có:

$$A = x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2\sqrt{(xy)^2} = 4. \text{ Đẳng thức xảy ra } x = y = \sqrt{2}.$$

Câu 21. Cho $a > b > 0$ và $x = \frac{1+a}{1+a+a^2}$, $y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x > y$.

B. $x < y$.

C. $x = y$.

D. Không so sánh được.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\frac{1}{x} = a + \frac{1}{a+1}$ và $\frac{1}{y} = b + \frac{1}{b+1}$.

Suy ra: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = (a-b) \left[1 - \frac{1}{(a+1)(b+1)} \right]$

Do $a > b > 0$ nên $a+1 > 1$ và $b+1 > 1$ suy ra: $\frac{1}{(a+1)(b+1)} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{(a+1)(b+1)} > 0$.

Vậy $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ do $x > 0$ và $y > 0$ nên $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Leftrightarrow x < y$.

Câu 22. Với $a, b, c, d > 0$. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề sai?

A. $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

B. $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

C. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

D. Có ít nhất hai trong ba mệnh đề trên là sai.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{(a-b)c}{b(b+c)}$ suy ra A, B đúng.

Câu 23. Hai số a, b thoả bất đẳng thức $\frac{a^2 + b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ thì

A. $a < b$.

B. $a > b$.

C. $a = b$.

D. $a \neq b$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Câu 24. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Một học sinh làm như sau:

I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \quad (1)$

II) $(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

III) và $(a - b)^2 \geq 0$ đúng $\forall a, b > 0$ nên $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Cách làm trên :

A. Sai từ I).

B. Sai từ II).

C. Sai ở III).

D. Cả I), II), III) đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 25. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức sau:

I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

II) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

III) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Bất đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ I) đúng.

B. Chỉ II) đúng.

C. Chỉ III) đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \Rightarrow (I)$ đúng; $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \Rightarrow (II)$ đúng;

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \end{cases} \Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Rightarrow (III) \text{ đúng.}$$

Câu 26. Cho các bất đẳng thức: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (I), $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ (II), $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (III) (với $a, b, c > 0$). Bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức trên là đúng?

A. chỉ I đúng.

B. chỉ II đúng.

C. chỉ III đúng.

D. I, II, III đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \Rightarrow (I)$ đúng; $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \Rightarrow (II)$ đúng;

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \\ a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow (III) \text{ đúng.}$$

Câu 27. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

I) $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

II) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

III) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 9$.

Bất đẳng thức nào đúng:

A. Chỉ I) và II) đúng.

B. Chỉ I) và III) đúng.

C. Chỉ I) đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

- $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (I)$ đúng;

- $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow (II) \text{ đúng;} \\ a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \end{cases}$
- $a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; c+a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow (III) \text{ sai.}$

Câu 28. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

$$\text{I) } \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8. \quad \text{II) } \left(\frac{2}{a} + b + c\right)\left(\frac{2}{b} + c + a\right)\left(\frac{2}{c} + a + b\right) \geq 64.$$

III) $a+b+c \leq abc$. Bất đẳng thức nào đúng?

- A. Chỉ I) đúng.
B. Chỉ II) đúng.
C. Chỉ I) và II) đúng.
D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}; 1 + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}; 1 + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8\sqrt[3]{\frac{abc}{a^2b^2c^2}} = 8 \Rightarrow (I) \text{ đúng.}$$

$$\frac{1}{a} + b \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}; \frac{1}{a} + c \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{2}{a} + b + c \geq 2\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}} = 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2}{b} + c + a \geq 4\sqrt[4]{\frac{ac}{b^2}}; \frac{2}{c} + a + b \geq 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}}.$$

$$\text{Suy ra: } \left(\frac{2}{a} + b + c\right)\left(\frac{2}{b} + c + a\right)\left(\frac{2}{c} + a + b\right) \geq 64 \Rightarrow (II) \text{ đúng.}$$

$$\text{Ta có: } 3\sqrt[3]{abc} \leq a+b+c \leq abc \Leftrightarrow \sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Leftrightarrow abc \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow (III) \text{ sai.}$$

Câu 29. Cho $x, y, z > 0$ và xét ba bất đẳng thức(I) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$; (II) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{9}{x+y+z}$; (III)

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3. \text{ Bất đẳng thức nào là đúng?}$$

- A. Chỉ I đúng. B. Chỉ I và III đúng. C. Chỉ III đúng. D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3xyz \Rightarrow (I) \text{ đúng;}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x+y+z) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow (II) \text{ sai;} \\ x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 3 \Rightarrow (III) \text{ đúng.}$$

Câu 30. Cho $a, b > 0$ và $ab > a+b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a+b=4$. B. $a+b>4$. C. $a+b<4$. D. $a+b \leq 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có: $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$.

$$\text{Do đó: } ab > a+b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} > a+b \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) > 0 \Leftrightarrow (a+b)(a+b-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow a+b-4 > 0 \text{ (vì } a+b > 0 \text{)} \Leftrightarrow a+b > 4.$$

Câu 31. Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$, $z = (a+d)(b+c)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x < y < z$. B. $y < x < z$. C. $z < x < y$. D. $x < z < y$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x-y &= (a+b)(c+d) - (a+c)(b+d) = a(c+d) + b(c+d) - a(b+d) - c(b+d) \\ &= a(c-b) + bd - cd = (d-a)(b-c) < 0. \end{aligned}$$

Suy ra: $x < y$.

Tương tự: $x-z = (a-c)(d-b) < 0 \Rightarrow x < z$; $y-z = (a-b)(d-c) < 0 \Rightarrow y < z$.

Câu 32. Với $m, n > 0$, bất đẳng thức: $mn(m+n) < m^3 + n^3$ tương đương với bất đẳng thức

- A. $(m+n)(m^2 + n^2) \geq 0$. B. $(m+n)(m^2 + n^2 + mn) \geq 0$.
 C. $(m+n)(m-n)^2 > 0$. D. Tất cả đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} mn(m+n) < m^3 + n^3 &\Leftrightarrow m^2n - m^3 + mn^2 - n^3 < 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2(m-n) + n^2(m-n) < 0 \Leftrightarrow (m-n)^2(m+n) > 0. \end{aligned}$$

Câu 33. Bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$, $\forall a, b, c, d$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

- A. $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{e}{2}\right)^2 \geq 0$.
 B. $\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$.
 C. $\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e + \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$.
 D. $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &\geq a(b+c+d+e) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ae + e^2\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Câu 34. Cho $x, y > 0$. Tìm bất đẳng thức sai?

- A. $(x+y)^2 \geq 4xy$. B. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{4}{x+y}$.
 C. $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$. D. $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow x = y.$$

Câu 35. Cho $x^2 + y^2 = 1$, gọi $S = x + y$. Khi đó ta có

-
- A. $S \leq \sqrt{2}$. B. $S \geq \sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}$. D. $-1 \leq S \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $1 = x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 2xy \leq 1$.

Mặt khác: $S^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}$.

Câu 36. Cho x, y là hai số thực thay đổi sao cho $x+y=2$. Gọi $m=x^2+y^2$. Khi đó ta có:

- A. giá trị nhỏ nhất của m là 2. B. giá trị nhỏ nhất của m là 4.
C. giá trị lớn nhất của m là 2. D. giá trị lớn nhất của m là 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $x+y=2 \Rightarrow y=2-x$.

Do đó: $m=x^2+y^2=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4=2(x-1)^2+2 \geq 2; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là 2.

Câu 37. Với mỗi $x > 2$, trong các biểu thức: $\frac{2}{x}, \frac{2}{x+1}, \frac{2}{x-1}, \frac{x+1}{2}, \frac{x}{2}$ giá trị biểu thức nào là nhỏ nhất?

- A. $\frac{2}{x}$. B. $\frac{2}{x+1}$. C. $\frac{2}{x-1}$. D. $\frac{x}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\frac{2}{x+1} < \frac{2}{x} < \frac{2}{x-1}$ và $\frac{x}{2} < \frac{x+1}{2}$.

Mặt khác: $\frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2+x-4}{2(x+1)} = \frac{(x-2)(x+2)+x}{2(x+1)} > 0; \forall x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > \frac{2}{x+1}$.

Câu 38. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là

- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 39. Cho $x \geq 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

- A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f(x) \geq 0$ và $[f(x)]^2 = \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{8} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ với $x > 0$ là

- A. $2.$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}.$. C. $\sqrt{2}.$. D. $2\sqrt{2}.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f(x) = 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}.$

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}.$

- Câu 41.** Với $a, b, c > 0$. Biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < P \leq \frac{3}{2}.$ B. $\frac{3}{2} < P.$ C. $\frac{4}{3} \leq P.$ D. $\frac{3}{2} \leq P.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $P+3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right).$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ suy ra: $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$

Do đó $P+3 \geq \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2};$ đẳng thức xảy ra khi $a=b=c.$