CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

1. Cấp số cộng

1.1. Định nghĩa: Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d \end{cases}, n \in N^*$ gọi là cấp số cộng; d gọi là công sai.

2.1. Các tính chất:

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$.
- Ba số hạng u_k, u_{k+1}, u_{k+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{k+1} = \frac{1}{2}\left(u_k + u_{k+2}\right)$.
- Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức :

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}\left(u_1 + u_n\right) = \frac{n}{2}\left[2u_1 + \left(n-1\right)d\right].$$

2. Cấp số nhân

1.2. Định nghĩa: Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n.q \end{cases}, n \in N^*$ gọi là cấp số cộng; q gọi là công bội.

2.2. Các tính chất:

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức: $u_n = u_1 q^{n-1}$.
- Ba số hạng u_k, u_{k+1}, u_{k+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{k+1}^2 = u_k.u_{k+2}$.
- Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức :

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Vấn đề 1. Xác định cấp số và xác yếu tố của cấp số

Phương pháp:

- Dãy số (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = d$ không phụ thuộc vào n và d là công sai.
- Dãy số (u_n) là một cấp số nhân $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ không phụ thuộc vào n và q là công bội.
- Ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

- Ba số a,b,c theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac=b^2$.
- Để xác định một cấp số cộng, ta cần xác định số hạng đầu và công sai. Do đó, ta thường biểu diễn giả thiết của bài toán qua u_1 và d.
- Để xác định một cấp số nhân, ta cần xác định số hạng đầu và công bội. Do đó, ta thường biểu diễn giả thiết của bài toán qua u_1 và q.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.

Lời giải.

Giả sử bốn số hạng đó là $a-3x;a-x;a+x;a+3x$ với công sai là $d=2x$ .Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}(a-3x)+(a-x)+(a+x)+(a+3x)=20\\(a-3x)^2+(a-x)^2+(a+x)^2+(a+3x)^2=120\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a=20\\4a^2+20x^2=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\x=\pm1\end{cases}$$

Vậy bốn số cần tìm là $2,4,6,8$.

Chú ý:

* Cách gọi các số hạng của cấp số cộng như trên giúp ta giải quyết bài toán gọn hơn.

* Nếu số hạng cấp số cộng là lẻ thì gọi công sai $d=x$, là chẵn thì gọi công sai $d=2x$ rồi viết các số hạng cấp số dưới dạng đối xứng.

* Nếu cấp số cộng (a_n) thỏa: $\begin{cases}a_1+a_2+...+a_n=p\\a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=s^2\end{cases}$ thì:

$$a_1=\frac{1}{n}\left[p-\frac{n(n-1)}{2}.d\right] \text{ và } d=\pm\sqrt{\frac{12(ns^2-p^2)}{n^2(n^2-1)}}.$$

Ví dụ 2. Cho CSC (u_n) thỏa : $\begin{cases}u_2-u_3+u_5=10\\u_4+u_6=26\end{cases}$

1. Xác định công sai và công thức tổng quát của cấp số;

2. Tính $S=u_1+u_4+u_7+...+u_{2011}$.

Lời giải.

Gọi d là công sai của CSC, ta có:

$$\begin{cases}(u_1+d)-(u_1+2d)+(u_1+4d)=10\\(u_1+3d)+(u_1+5d)=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=10\\u_1+4d=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=3\end{cases}$$

1. Ta có công sai $d=3$ và số hạng tổng quát : $u_n=u_1+(n-1)d=3n-2$.

2. Ta có các số hạng $u_1,u_4,u_7,...,u_{2011}$ lập thành một CSC gồm 670 số hạng với công sai $d'=3d$, nên ta có: $S=\frac{670}{2}\left(2u_1+669d'\right)=673015$

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_5+3u_3-u_2=-21 \\ 3u_7-2u_4=-34 \end{cases}$.

1. Tính số hạng thứ 100 của cấp số ;

2. Tính tổng 15 số hạng đầu của cấp số ;

3. Tính $S=u_4+u_5+...+u_{30}$.

Lời giải.

Từ giả thiết bài toán, ta có: $\begin{cases} u_1+4d+3(u_1+2d)-(u_1+d)=-21 \\ 3(u_1+6d)-2(u_1+3d)=-34 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+3d=-7 \\ u_1+12d=-34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=2 \\ d=-3 \end{cases}$.

1. Số hạng thứ 100 của cấp số: $u_{100}=u_1+99d=-295$

2. Tổng của 15 số hạng đầu: $S_{15}=\frac{15}{2}\left[2u_1+14d\right]=-285$

3. Ta có: $S=u_4+u_5+...+u_{30}=\frac{27}{2}\left[2u_4+26d\right]$

$=27\left(u_1+16d\right)=-1242$.

Chú ý: Ta có thể tính S theo cách sau:

$$S=S_{30}-S_3=15\left(2u_1+29d\right)-\frac{3}{2}\left(2u_1+2d\right)=-1242.$$

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2-u_3+u_5=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases}$

1. Xác định cấp số cộng

2. Tính tổng $S=u_5+u_7+\ldots+u_{2011}$

Lời giải.

1. Ta có: $\begin{cases} u_1+d-(u_1+2d)+u_1+4d=10 \\ u_1+3d+u_1+5d=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+3d=10 \\ u_1+4d=13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow u_1=1, d=3; u_5=u_1+4d=1+12=13$

2. Ta có $u_5,u_7,...,u_{2011}$ lập thành CSC với công sai $d=6$ và có 1003 số hạng nên $S=\frac{1003}{2}\left(2u_5+1002.6\right)=3028057$.

Ví dụ 5. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Tính $S = \frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} + ... + \frac{1}{u_{49}u_{50}}$

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số đã cho

Ta có: $S_{100} = 50\left(2u_1 + 99d\right) = 24850 \Rightarrow d = \frac{497 - 2u_1}{99} = 5$

$$\Rightarrow 5S = \frac{5}{u_1u_2} + \frac{5}{u_2u_3} + ... + \frac{5}{u_{49}u_{50}}$$

$$= \frac{u_2 - u_1}{u_1u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2u_3} + ... + \frac{u_{50} - u_{49}}{u_{49}u_{50}}$$

$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + ... + \frac{1}{u_{48}} - \frac{1}{u_{49}} + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}}$$

$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1 + 49d} = \frac{245}{246}$$

$\Rightarrow S = \frac{49}{246}$.

Ví dụ 6. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng khác không, tìm u_1 biết:

1. $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 11 \\ u_1 + u_5 = \frac{82}{11} \end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có: $\begin{cases} u_1(1 + q + q^2 + q^3) = 15 \\ u_1^2\left(1 + q^2 + q^4 + q^6\right) = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\frac{q^4 - 1}{q - 1} = 15 \\ u_1^2\frac{q^8 - 1}{q^2 - 1} = 85 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{q^4 - 1}{q - 1}\right)^2\left(\frac{q^2 - 1}{q^8 - 1}\right) = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(q^4 - 1)(q + 1)}{(q - 1)(q^4 + 1)} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được $u_1 = 1, u_1 = 8$.

2. Ta có: $\begin{cases} u_1\left(1 + q + q^2 + q^3 + q^4\right) = 11 \\ u_1(1 + q^4) = \frac{82}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(1 + q + q^2) = \frac{39}{11} \\ u_1(1 + q^4) = \frac{82}{11} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{q^4+1}{q^3+q^2+q}=\frac{82}{39} \Leftrightarrow q=3, q=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 7. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_4=\dfrac{2}{27} \\ u_3=243u_8 \end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của cấp số;
2. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số;
3. Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số ?

Lời giải.
Gọi q là công bội của cấp số. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1q^3=\dfrac{2}{27} \\ u_1q^2=243.u_1q^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3=\dfrac{2}{27} \\ q^5=\dfrac{1}{243} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\dfrac{1}{3} \\ u_1=2 \end{cases}$$

1. Năm số hạng đầu của cấp số là:

$$u_1=2, u_2=\frac{2}{3}, u_3=\frac{2}{9}; u_4=\frac{2}{27}, u_5=\frac{2}{81}.$$

2. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số

$$S_{10}=u_1\frac{q^{10}-1}{q-1}=2.\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10}-1}{\frac{1}{3}-1}=3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right]=\frac{59048}{19683}.$$

3. Ta có: $u_n=\frac{2}{3^{n-1}} \Rightarrow u_n=\frac{2}{6561} \Leftrightarrow 3^{n-1}=6561=3^8 \Rightarrow n=9$

Vậy $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Dãy số (u_n) có phải là cấp số cộng không ? Nếu phải hãy xác định số công sai ? Biết:

1. $u_n=2n+3$ **2.** $u_n=-3n+1$ **3.** $u_n=n^2+1$ **4.** $u_n=\frac{2}{n}$

Bài 2 . Dãy số (u_n) có phải là cấp số nhân không ? Nếu phải hãy xác định số công bội ? Biết:

1. $u_n = 2n$ **2.** $u_n = 4.3^n$ **3.** $u_n = \frac{2}{n}$.

Bài 3. Xét xem các dãy số sau có phải là cấp số cộng hay không? Nếu phải hãy xác định công sai.

1. $u_n = 3n + 1$ **2.** $u_n = 4 - 5n$ **3.** $u_n = \frac{2n+3}{5}$

4. $u_n = \frac{n+1}{n}$ **5.** $u_n = \frac{n}{2^n}$ **6.** $u_n = n^2 + 1$

Bài 4 Xét xem các dãy số sau có phải là cấp số nhân hay không? Nếu phải hãy xác định công bội.

1. $u_n = 2^n$ **2.** $u_n = -\frac{3^{n-1}}{5}$ **3.** $u_n = 3n - 1$

4. $u_n = \frac{2^n - 1}{3}$ **5.** $u_n = n^3$.

Bài 5.

1. Tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng và $C = 5A$. Xác định số đo các góc A, B, C.

2. Cho tam giác ABC biết ba góc tam giác lập thành cấp số cộng và $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ tính các góc của tam giác

Bài 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^{\frac{n}{2}+1}$

1. Chứng minh dãy số (u_n) là cấp số nhân

2. Tính tổng $S = u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{20}$

3. Số 19683 là số hạng thứ mấy của dãy số.

Bài 7.

1. Cho cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ 7 gấp 243 lần số hạng thứ hai. Hãy tìm số hạng còn lại của CSN đó.

2. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng -9 và tổng các bình phương của chúng bằng 29.

3. Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành cấp số nhân. Biết tổng số hạng đầu và cuối là 37, tổng hai số hạng giữa là 36, tìm bốn số đó.

Bài 8.

1. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm u_1, d?

2. Cho cấp số cộng (uₙ) có công sai $d>0$; $\begin{cases} u_{31}+u_{34}=11 \\ u_{31}^2+u_{34}^2=101 \end{cases}$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

3. Gọi $S_1;S_2;S_3$ là tổng $n_1;n_2;n_3$ số hạng đầu của một cấp số cộng. Chứng minh rằng: $\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0$

Bài 9. Cho CSN (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=11 \\ u_1+u_5=\frac{82}{11} \end{cases}$

1. Tìm công bội và số hạng tổng quát của cấp số

2. Tính tổng S_{2011}

3. Trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$ có bao nhiêu số hạng của cấp số.

Bài 10.

1. Cho dãy số $(x_n): x_n=\frac{1}{n}$, $n=1,2,3...$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một CSC gồm 2011 số hạng mà mỗi số hạng đều thuộc dãy số trên.

Vấn đề 2. Chứng minh tính chất của cấp số

Phương pháp:

- Sử dụng công thức tổng quát của cấp số, chuyển các đại lượng qua số hạng đầu và công sai, công bội.
- Sử dụng tính chất của cấp số:

  i) a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSC $\Leftrightarrow a+c=2b$

  ii) a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSN $\Leftrightarrow ac=b^2$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các số:

1. $1,\sqrt{3},3$ không thể cùng thuộc một CSC;

2. $2,3,5$ không thể cùng thuộc một CSN.

Lời giải.

1. Giả sử $1,\sqrt{3},3$ là số hạng thứ m,n,p của một CSC (u_n). Ta có:

$\sqrt{3}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{u_p-u_n}{u_n-u_m}=\frac{u_1(p-n)}{u_1(n-m)}=\frac{p-n}{n-m}$ vô lí vì $\sqrt{3}$ là số vô tỉ, còn $\frac{p-n}{n-m}$ là số hữu tỉ.

2. Giả sử $2,3,5$ là ba số hạng thứ m,n,p của CSN (v_n) có công bội q

Ta có: $\frac{2}{3}=\frac{u_m}{u_n}=q^{m-n};\frac{5}{3}=q^{p-n}$, suy ra $\left(\frac{2}{3}\right)^{p-n}=\left(\frac{5}{3}\right)^{m-n}=p^{(p-n)(m-n)}$

$\Rightarrow 2^{p-n}.3^{m-p}.5^{n-m}=1$ vô lí.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) là:

1. CSC khi và chỉ khi $u_n=an+b$ **2.** CSN khi và chỉ khi $u_n=a.q^n$.

Lời giải.

1. Giả sử (u_n) là một CSC công sai d, khi đó :

$$u_n=u_1+(n-1)d=dn+u_1-d=an+b.$$

Giả sử: $u_n=an+b\Rightarrow u_{n+1}-u_n=a\Rightarrow u_{n+1}=u_n+a,\ \forall n$

Suy ra (u_n) là một CSC với công sai a.

2. Giả sử (u_n) là CSN với công bội q, khi đó: $u_n=u_1.q^n$

Giả sử $u_n=a.q^n$, suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\Rightarrow u_{n+1}=q.u_n,\ \forall n$

Suy ra dãy (u_n) là CSN với công bội q.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng :

1. Nếu phương trình $x^3-ax^2+bx-c=0$ có ba nghiệm lập thành CSC thì $9ab=2a^3+27c$

2. Nếu phương trình $x^3-ax^2+bx-c=0$ có ba nghiệm lập thành CSN thì $c(ca^3-b^3)=0$

Lời giải.

1. Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1,x_2,x_3 lập thành CSC

Suy ra: $x_1+x_3=2x_2$ (1)

Mặt khác: $x^3-ax^2+bx-c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$$

Suy ra $x_1+x_2+x_3=a$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $3x_2=a$ hay $x_2=\frac{a}{3}$

Dẫn tới phương trình đã cho có nghiệm $x_2=\frac{a}{3}$, tức là:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3-a\left(\frac{a}{3}\right)^2+b\left(\frac{a}{3}\right)-c=0\Leftrightarrow-\frac{2a^3}{27}+\frac{ba}{3}-c=0\Leftrightarrow 9ab=2a^3+27c$$

Ta có đpcm.

2. Giả sử ba nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành CSN, suy ra $x_1x_3 = x_2^2$

Theo phân tích bài trên, ta có: $x_1x_2x_3 = c \Rightarrow x_2^3 = c \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{c}$

Hay phương trình đã cho có nghiệm $x_2 = \sqrt[3]{c}$, tức là:

$\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 - a\left(\sqrt[3]{c}\right)^2 + b\sqrt[3]{c} - c = 0 \Leftrightarrow b\sqrt[3]{c} = a\sqrt[3]{c^2} \Leftrightarrow c(ca^3 - b^3) = 0$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi cách chia tập $X = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ thành hai tập con rời nhau luôn có một tập chứa ba số lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng

Giả sử X được chia thành hai tập con A và B đồng thời trong A và B không có ba số nào lập thành CSC.

Xét ba CSC (1;3;5), (3;4;5), (3;5;7)

Ta thấy số 3, 5 không thể cùng nằm trong một tập hợp, vì nếu hai số này thuộc A thì 1,4,7 phải thuộc B, tuy nhiên các số 1,4,7 lại lập thành CSC.

Tương tự bằng cách xét CSC (3;5;7), (5;6;7), (5;7;9) thì ta có hai số 5,7 không thể cũng nằm trong một tập.

Vì cặp (3;5) và (5;7) hkoogn cùng thuộc một tập nên ta suy ra

(3;7) thuộc A, 5 thuộc B. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- $4 \in A$, vì $3, 4 \in A \Rightarrow 2 \notin A \Rightarrow 2 \in B$, do 1,4,7 lập thành CSC nên $1 \in B$; 2,5,8 lập thành CSC nên $8 \in A \Rightarrow 9 \in B$

Do đó $1, 5, 9 \in B$ lập thành CSC vô lí

- $4 \in B$, do $4, 5 \in B \Rightarrow 6 \in A$ mà $6, 7 \in A \Rightarrow 8 \in B$

$5, 8 \in B \Rightarrow 2 \in A$, vì $2, 3 \in A \Rightarrow 1 \in B$, vì $1, 5 \in B \Rightarrow 9 \in A$

Do đó: $3, 6, 9 \in B$ vô lí.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5. Dãy số (xn) thỏa mãn điều kiện: $\left|x_{n+m} - x_m - x_n\right| < \dfrac{1}{m+n}$ $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: (xn) là một cấp số cộng.

Lời giải.

Đặt $a_n = x_n - nx_1$, khi đó ta có $a_1 = 0$ và $|a_{m+n} - a_m - a_n| < \dfrac{1}{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}$. Ở đây ta sẽ chứng minh $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, ta có:

$\left|a_{n+1}-a_n\right|<\frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, nên $\lim |a_{n+1}-a_n|=0$ hay $\lim |a_{n+k}-a_n|=0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Mà $\left|a_{n+k}-a_n-a_k\right|<\frac{1}{n+k}$ nên $\lim\limits_{n} |a_{n+k}-a_n-a_k|=0$.

Từ đây suy ra $a_k=0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho ba số a,b,c lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng :
$a^2+2bc=c^2+2ab$.

2. Cho $a,b,c>0$ lập thành cấp sô cộng.Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

3. Cho (u_n) là cấp số cộng. Chứng minh rằng :

$$u_n=\frac{1}{2}\left(u_{n-k}+u_{n+k}\right),\ 1\le k\le n-1$$

Bài 2

1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\tan\frac{A}{2};\tan\frac{B}{2};$ $\tan\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \cos A;\cos B;\cos C$ lập thành cấp số cộng.

2. Cho tam giác ABC.Chứng minh rằng $\cot\frac{A}{2};\cot\frac{B}{2};\cot\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \sin A;\sin B;\sin C$ lập thành cấp số cộng.

Bài 3 Cho a,b,c lập thành cấp số nhân . .Chứng minh rằng :

1. $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

2. $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=(ab+bc)^2$

3. $(ab+bc+ca)^3=abc(a+b+c)^3$

4. $\left(a^n+b^n+c^n\right)\left(a^n-b^n+c^n\right)=a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$; $n\in\mathbb{N}^*$

Bài 4 Cho (u_n) là cấp số nhân .Chứng minh rằng :

1. $a_1a_n=a_k.a_{n-k+1},\ k=\overline{1;n}$

2. $S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right)=\left(S_{2n}-S_n\right)^2$.

Bài 5

1. Điều cần và đủ để ba số khác không a,b,c là ba số hạng của một CSN là tồn tại ba số nguyên khác không p,t,r sao cho

$$\begin{cases} p+t+r=0 \\ a^p.b^t.c^r=1 \end{cases}.$$

2. Cho cấp số cộng (a_n) với các số hạng khác không và công sai khác không.Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$.

3. Cho bốn số thực $a_1;a_2;a_3;a_4$ .Biết rằng : $\begin{cases} \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3} \\ \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{3}{a_1a_4} \end{cases}$

Chứng minh rằng : $a_1;a_2;a_3;a_4$ lập thành cấp số cộng.

4. Cho a,b,c lần lượt là ba số hạng thứ m,n,p của một cấp số cộng. Chứng minh rằng : $a.(n-p)+b.(p-m)+c.(m-n)=0$.

5. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba số a,b,c là ba số hạng của một CSC là tồn tại ba số nguyên khác không p,q,r thỏa: $\begin{cases} pa+qb+rc=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$.

6.Cho CSC (u_n) thỏa $S_m=S_n$ ($m\neq n$). Chứng minh $S_{m+n}=0$.

7. Chứng minh rằng nếu ba cạnh của tam giác lập thành CSN thì công bội của CSN đó nằm trong khoảng $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 6

1. Chứng minh ba số $a,b,c>0$ là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi 3 số $a^2+ab+b^2;c^2+ca+a^2;b^2+bc+c^2$ cũng là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

2. Cho (u_n) là cấp số nhân. Kí hiệu $S=u_1+u_2+...+u_n$;

$T=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}$; $P=u_1u_2...u_n$. Hãy tính P theo S,T và n.

Bài 7 Cho hai số tự nhiên n,k thỏa $k+3\le n$.

1. Chứng minh rằng tồn tại không quá hai giá trị của k sao cho C_n^k, C_n^{k+1} và C_n^{k+2} là ba số hạng liên tiếp của một CSC.

2. Chứng minh rằng không tồn tại k để C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} và C_n^{k+3} là bốn số hạng liên tiếp của một CSC.

Bài 8

1. Cho (u_n) là CSC. Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\frac{u_1+u_{n+1}}{2}.\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$

2. Cho k là một số nguyên dương cho trước. Giả sử $s_1,s_2,s_3,...$ là một dãy tăng nghặt các số nguyên dương sao cho các dãy con $s_{s_1},s_{s_2},s_{s_3},...$ và $s_{s_1+k},s_{s_2+k},s_{s_3+k},...$ đều là cấp số cộng. Chứng minh rằng $s_1,s_2,s_3,...$ cũng là một cấp số cộng

Vấn đề 3. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số

Phương pháp:

- a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSC $\Leftrightarrow a+c=2b$
- a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSN $\Leftrightarrow ac=b^2$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm x biết :

1. $x^2+1,x-2,1-3x$ lập thành cấp số cộng ;

2. $1,x^2,6-x^2$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

1. Ta có: $x^2+1,x-2,1-3x$ lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow x^2+1+1-3x=2(x-2)\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2;x=3$

Vậy $x=2,x=3$ là những giá trị cần tìm.

2. Ta có: $1,x^2,6-x^2$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x^4=6-x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Cho các số $5x-y,\ 2x+3y,\ x+2y$ lập thành cấp số cộng ; các số $(y+1)^2,xy+1,(x-1)^2$ lập thành cấp số nhân.Tính x,y

Lời giải.

Ta có các số $5x-y,\ 2x+3y,\ x+2y$ lập thành CSC nên suy ra

$2(2x+3y)=5x-y+x+2y$ hay $2x=5y$ (1)

Các số $(y+1)^2,xy+1,(x-1)^2$ lập thành CSN suy ra

$(xy+1)^2=(y+1)^2(x-1)^2\Leftrightarrow(4+2y-2x)(4xy+2x-2y)=0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được : $(4+2y-5y)(10y^2+5y-2y)=0$

$\Leftrightarrow y(4-3y)(10y+3)=0 \Leftrightarrow y=0, y=\frac{4}{3}, y=-\frac{3}{10}$.

Vậy $(x;y)=(0;0);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right);\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{10}\right)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm x để các số sau lập thành cấp số cộng

1. $1;x;x^3$ **2.** $1;\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right);4\sin x$

Bài 2. Tìm x,y biết:

1. Các số $x+5y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng và các số $(y-1)^2, xy-1, (x+1)^2$ lập thành cấp số nhân.

2. Các số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng và các số $x+\frac{5}{3}y, y-1, 2x-3y$ lập thành cấp số nhân.

Bài 3. Xác định a,b để phương trình $x^3+ax+b=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Bài 4 Tìm m để phương trình:

1. $mx^4-2(m-1)x^2+m-1=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

2. $x^3-3mx^2+4mx+m-2=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân

Bài 5 Xác định m để:

1. Phương trình $x^3-3x^2-9x+m=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

2. Phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

3. Phương trình $x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.