

CHỦ ĐỀ 5: TỔNG HỢP CÁC DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA

BÀI TOÁN THUẬN TRONG TỔNG HỢP DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA

Nội dung bài toán: Cho biết các phương trình dao động thành phần, yêu cầu tìm dao động tổng hợp.

Phương pháp giải

Tổng hợp hai hay nhiều dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số là một dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số.

Cách 1. Phương pháp áp dụng trực tiếp công thức tính A và $\tan \varphi$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

* Nếu một dạng hàm cos, một dạng hàm sin thì đổi:

$$\sin(\omega t + \alpha) = \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

* Nếu hai dao động cùng pha $\varphi_2 - \varphi_1 = k2\pi \Rightarrow A_{\max} = A_1 + A_2$

* Nếu hai dao động thành phần ngược pha $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \Rightarrow A_{\min} = |A_1 - A_2|$

* Nếu hai dao động thành phần vuông pha $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

Cách 2. Phương pháp cộng các hàm lượng giác

$$x = x_1 + x_2 + \dots$$

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots$$

$$x = \cos \omega t \underbrace{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)}_{A \cos \varphi} - \sin \omega t \underbrace{(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)}_{A \sin \varphi}$$

$$\Rightarrow x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Cách 3. Phương pháp cộng số phức.

$$x = x_1 + x_2 + \dots$$

$$x = A_1 \angle \varphi_1 + A_2 \angle \varphi_2 + \dots$$

Kinh nghiệm:

1) Khi cần tổng hợp hai dao động điều hòa có thể dùng một trong ba cách trên.

Khi cần tổng hợp ba dao động điều hòa trở lên thì nên dùng cách 2 hoặc cách 3.

2) Phương pháp cộng số phức chỉ áp dụng trong trường hợp các số liệu tương minh hoặc biên độ của chúng có dạng nhân cùng với một số,

$$\text{Ví dụ: } \begin{cases} A_1 = \sqrt{2}a \\ A_2 = \sqrt{3}a \Rightarrow \text{chọn } a=1 \\ A_3 = \sqrt{5}a \end{cases}$$

3) Trường hợp chưa biết một đại lượng nào đó thì nên dùng phương pháp vector quay hoặc cộng hàm lượng giác. Trường hợp hai dao động thành phần cùng biên độ thì nên dùng phương pháp lượng giác.

Ví dụ 1: Một vật thực hiện hai dao động điều hòa cùng phương cùng tần số: $x_1 = 4 \cos(\omega t + 30) \text{ cm}$, $x_2 = 8 \cos(\omega t + 90) \text{ cm}$ (với ω đo bằng rad/s và t đo bằng giây). Dao động tổng hợp có biên độ là

- A. 6,93 cm. B. 10,58 cm. C. 4,36 cm. D. 11,87 cm.

Hướng dẫn: Chọn đáp án C

Bài toán đơn giản nên ta dùng cách 1: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

$$A = \sqrt{4^2 + 8^2 + 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos(90 - 30)} = 4,36 \text{ (cm)}$$

Ví dụ 2: (ĐH-2008) Cho hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số, cùng biên độ và có các pha ban đầu là $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{\pi}{6}$ (phương trình dạng cos). Pha ban đầu của dao động tổng hợp hai dao động trên bằng

- A. $-\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12}$

Hướng dẫn: Chọn đáp án D

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{a \sin \frac{\pi}{3} + a \sin \frac{-\pi}{6}}{a \cos \frac{\pi}{3} + a \cos \frac{-\pi}{6}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{12}$$

Ví dụ 3: Một vật thực hiện đồng thời 2 dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số có phương trình: $x_1 = \sqrt{3} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}$, $x_2 = \cos(\omega t + \pi) \text{ (cm)}$. Phương trình dao động tổng hợp là

A. $x = 2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ B. $x = 2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ C. $x = 2 \cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $x = 2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$

Hướng dẫn: Chọn đáp án

$$x = \sqrt{3} \angle \frac{\pi}{2} + 1 \angle \pi = 2 \angle \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) (cm)$$

Dùng máy tính Casio fx 570 – ES, bấm như sau:

Shift **MODE** **4** (Để chọn đơn vị góc là radian)

MODE **2** (Để chọn chế độ tính toán với số phức)

$\sqrt{3}$ **Shift** **(-)** $\frac{p}{2}$ **+** **1** **Shift** **(-)** **p**

(Màn hình máy tính sẽ hiện thị $\sqrt{3} \angle \frac{\pi}{2} + 1 \angle \pi$)

Shift **2** **3** **=**

Màn hình sẽ hiện kết quả: $2 \angle \frac{2\pi}{3}$.

Nghĩa là biên độ $A = 2cm$ và pha ban đầu $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ nên ta sẽ chọn B.

Chú ý: Để thực hiện phép tính về số phức, bấm: **MODE 2** màn hình xuất hiện **CMPLX**.

Muốn biểu diễn số phức dạng $A \angle \varphi$, bấm **SHIFT 2 3 =**

Muốn biểu diễn số phức dạng: $a + bi$, bấm **SHIFT 2 4 =**

Để nhập ký tự \angle bấm: **SHIFT (-)**

Khi nhập các số liệu thì phải thống nhất được đơn vị đo góc là độ hay radian

Nếu chọn đơn vị đo là độ (D), bấm: **SHIFT MODE 3** màn hình hiển thị chữ D

Nếu chọn đơn vị đo là Rad (R), bấm: **SHIFT MODE 4** màn hình hiển thị chữ R.

Ví dụ 4: Một vật thực hiện đồng thời 2 dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số có phương

trình: $x_1 = 2 \sin\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) (cm)$, $x_2 = \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) (cm)$. Phương trình dao động tổng hợp

A. $x = \sqrt{5} \cos(\pi t + 1,63)$

B. $x = \cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$

C. $x = \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$

D. $x = \sqrt{5} \cos(\pi t - 1,51)$

Hướng dẫn: Chọn đáp án D

$$\text{Đổi hàm sin về hàm} \begin{cases} x_1 = 2 \sin\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\pi t - \frac{4\pi}{3}\right) (cm) \\ x_2 = \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Cách 1:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{-4\pi}{3}\right)} = \sqrt{5} (cm)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{2 \sin \frac{-4\pi}{3} + 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{2 \cos \frac{-4\pi}{3} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = -8 - 5\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -1,51 (rad)$$

Cách 2:

$$x = x_1 + x_2 = 2 \sin\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = 2 \sin \pi t \cos \frac{5\pi}{6} - 2 \cos \pi t \sin \frac{5\pi}{6} + \cos \pi t \cos \frac{\pi}{6} - \sin \pi t \sin \frac{\pi}{6}$$

$$x = \cos \pi t \cdot \underbrace{\left(\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}\right)}_{\sqrt{5} \cos(-1,51)} - \sin \pi t \cdot \underbrace{\left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\right)}_{\sqrt{5} \sin(-1,51)} = \sqrt{5} \cos(\pi t - 1,51) (cm)$$

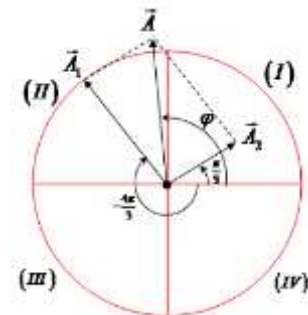
Cách 3:

$$x = x_1 + x_2 = 2 \angle \left(-\frac{4\pi}{3}\right) + 1 \angle \left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{5} \angle 1,63 \Rightarrow x = \sqrt{5} \cos(\pi t + 1,63) (cm)$$

Bình luận : Đáp án đúng là A! Vậy cách 1 và cách 2 sai ở đâu? Ta dễ thấy, véc tơ tổng $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ nằm ở góc phần tư thứ III vì vậy không thể lấy $\varphi = -1,51 rad$!

Sai lầm ở chỗ, phương trình có hai nghiệm :

$$\tan \varphi = -8 - 5\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -1,51 (rad) \\ \varphi = \pi - 1,51 = 1,63 (rad) \end{cases}$$



Ta phải chọn nghiệm 1,63 rad để cho véc tơ tổng “bị kẹp” bởi hai véc tơ thành phần. Qua đó ta thấy máy tính không “đỉnh những bẫy” thông thường giống như con người! Đây chính là một trong những lợi thế của cách 3.

Ví dụ 5: Cho hai dao động điều hoà cùng phương cùng tần số, biên độ lần lượt là a và $a\sqrt{3}$ và pha ban đầu tương ứng là $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$. Pha ban đầu của dao động tổng hợp là:

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $-\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

Hướng dẫn: Chọn đáp án B

Muốn sử dụng máy tính ta chọn a = 1 và thực hiện như sau :

$$x = x_1 + x_2 = 1\angle(2\pi/3) + \sqrt{3}\angle(\pi/6) = 2\angle(\pi/3) \Rightarrow x = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) (cm)$$

Dùng máy tính Casio fx 570 – ES, bấm như sau:

[SHIFT] [MODE] [4] (Để chọn đơn vị góc là radian)

[MODE] [2] (Để chọn chế độ tính toán với số phức)

$$1 \text{ [SHIFT] } (-) \frac{2\pi}{3} \text{ [+]} \sqrt{3} \text{ [SHIFT] } (-) \frac{\pi}{6} :$$

(Màn hình máy tính sẽ hiện thị $1\angle(2\pi/3) + \sqrt{3}\angle(\pi/6)$)

[SHIFT] [2] [3] [=]

Màn hình sẽ hiện kết quả: $2\angle(\pi/3)$

Nghĩa là biên độ $A = 2a$ và pha ban đầu $\varphi = \frac{\pi}{3}$ nên ta sẽ chọn B.

Dùng máy tính Casio fx 570 – MS, bấm như sau:

[SHIFT] [MODE] [3] [=] (Để cài đặt ban đầu, đơn vị đo góc là độ).

[MODE] [2] (Để cài đặt tính toán với số phức).

$$1 \text{ [SHIFT] } (-) 120 \text{ [+]} \sqrt{\text{[3] [SHIFT] } (-) 30} : \begin{cases} \text{Bán [SHIFT] [+]= sẽ cho } A = 2 \\ \text{Bán [SHIFT] [=] sẽ cho } \varphi = 60 \end{cases}$$

Nghĩa là biên độ $A = 2$ cm và pha ban đầu $\varphi = 60^\circ$ nên ta sẽ chọn B.

Chú ý: Nếu hai dao động thành phần có cùng biên độ thì ta nên dùng phương pháp lượng giác:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_1) + a \cos(\omega t + \varphi_2) = 2a \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Ví dụ 6: Phương trình dao động tổng hợp của 2 dao động thành phần cùng phương cùng tần

số: $x_1 = 4\cos(100t)(cm)$; $x_2 = 4\cos\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) (cm)$ là:

A. $x = 4.\cos\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) cm$

B. $x = 4\sqrt{2}.\cos\left(100t + \frac{\pi}{8}\right) cm$

C. $x = 4\sqrt{2}.\cos\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) cm$

D. $x = 4.\cos\left(100t + \frac{3\pi}{4}\right) cm$

Hướng dẫn: Chọn đáp án B

$$x = x_1 + x_2 = 2.4 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(100t + \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \cos \left(100t + \frac{\pi}{4} \right) (cm)$$

Ví dụ 7: Biên độ dao động tổng hợp của ba dao động $x_1 = 4\sqrt{2} \cos 4\pi t (cm)$,

$x_2 = 4 \cos (4\pi t + 0,75\pi) (cm)$ và $x_3 = 3 \cos (4\pi t + 0,25\pi) (cm)$ là:

- A. 7 cm. B. $8\sqrt{2}$ cm. C. 8 cm. D. $7\sqrt{2}$ cm.

Hướng dẫn: Chọn đáp án A

Cách 1: Phương pháp cộng các hàm lượng giác

$$x = x_1 + x_2 + \dots$$

$$x = \cos \omega t (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \dots) - \sin \omega t (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \dots)$$

$$x = \cos 4\pi t \left(4\sqrt{2} \cos 0 + 4 \cos \frac{3\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{4} \right) - \sin 4\pi t \left(4\sqrt{2} \sin 0 + 4 \sin \frac{3\pi}{4} + 3 \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$x = 3,5\sqrt{2} \cos 5t - 3,5\sqrt{2} \sin 5t = 7 \cdot \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right) (cm) \Rightarrow A = 7 (cm)$$

Cách 2: Phương pháp cộng số phức

$$x = x_1 + x_2 + \dots = A_1 \angle \varphi_1 + A_2 \angle \varphi_2 + \dots$$

$$x = 4\sqrt{2} \angle 0 + 4 \angle \frac{3\pi}{4} + 3 \angle \frac{\pi}{4} = 7 \angle \frac{\pi}{4}$$

Dùng máy tính Casio fx 570 – ES, bấm như sau:

[SHIFT] [MODE] [4] (Để chọn đơn vị góc là radian)

[MODE] [2] (Để chọn chế độ tính toán với số phức)

$$4\sqrt{2} \text{ [SHIFT] [(-)] } 0 \text{ [+]} 4 \text{ [SHIFT] [(-)] } \frac{3\pi}{4} \text{ [+]} 3 \text{ [SHIFT] [(-)] } \frac{\pi}{4} :$$

(Màn hình máy tính sẽ hiện thị $4\sqrt{2} \angle 0 + 4 \angle \frac{3\pi}{4} + 3 \angle \frac{\pi}{4}$)

[SHIFT] [2] [3] [=]

Màn hình sẽ hiện kết quả: $7 \angle \frac{\pi}{4}$

Nghĩa là biên độ $A = 7 \text{ cm}$ và pha ban đầu $\varphi = \frac{\pi}{4}$ nên ta sẽ chọn A.

(Pha ban đầu bằng 0 thì chỉ cần nhập $4\sqrt{2} + 4 \angle \frac{3\pi}{4} + 3 \angle \frac{\pi}{4}$ vẫn được kết quả như trên).

Dùng máy tính Casio fx 570 – MS, bấm như sau:

$\boxed{SHIFT} \boxed{MODE} \boxed{3} \boxed{=}$ (Để cài đặt ban đầu, đơn vị đo góc là độ).

$\boxed{MODE} \boxed{2}$ (Để cài đặt tính toán với số phức).

$\boxed{4} \boxed{\sqrt{}} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{SHIFT} \boxed{(-)} \boxed{135} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{SHIFT} \boxed{(-)} \boxed{45}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bấm } \boxed{SHIFT} \boxed{+} \boxed{=} \text{ sẽ cho } A = 7 \\ \text{Bấm } \boxed{SHIFT} \boxed{=} \text{ sẽ cho } \varphi = 45 \end{array} \right.$

Nghĩa là biên độ $A = 7$ và pha ban đầu $\varphi = 45^\circ$ nên ta sẽ chọn A.

Ví dụ 8: Một vật thực hiện đồng thời 3 dao động điều hòa cùng pha cùng tần số có phương trình lần lượt là $x_1 = 5 \cos(2\pi t + \varphi)(cm)$; $x_2 = 3 \cos(2\pi t - \pi)(cm)$; $x_3 = 4 \cos\left(2\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)(cm)$, với

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ và $\tan \varphi = \frac{4}{3}$. Phương trình dao động tổng hợp là

A. $x = 4\sqrt{3} \cos\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)(cm)$

B. $x = 3\sqrt{3} \cos\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)(cm)$

C. $x = 4 \cos\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)(cm)$

D. $x = 3 \cos\left(2\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)(cm)$

Hướng dẫn: Chọn đáp án A

$$5 \angle \arctan \frac{4}{3} + 3 \angle -\pi + 4 \angle -\frac{5\pi}{6} = 4 \angle \frac{5\pi}{6}$$

Ví dụ 9: Vật thực hiện đồng thời hai dao động cùng phương có phương trình $x_1 = 8 \cos\left(20t - \frac{\pi}{3}\right)(cm)$ và $x_2 = 3 \cos\left(20t + \frac{\pi}{3}\right)(cm)$ (với t đo bằng giây). Tính gia tốc cực đại, tốc độ cực đại và vận tốc của vật khi nó ở vị trí cách vị trí thế năng cực đại gần nhất là 2 cm.

Hướng dẫn:

Biên độ dao động tổng hợp:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2.A_1.A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{64 + 9 + 2.8.3 \cdot \cos \frac{2\pi}{3}} = 7(cm)$$

$$\text{Gia tốc cực đại và tốc độ cực đại: } \begin{cases} a_{\max} = \omega^2 A = 20^2 \cdot 7 = 2800(cm/s^2) \\ v_{\max} = \omega A = 20 \cdot 7 = 140(cm/s) \end{cases}$$

Vị trí cách vị trí thế năng cực đại gần nhất là 2 cm, tức là vị trí đó cách vị trí cân bằng $|x| = 7 - 2 = 5(cm)$.

Vận tốc tính theo công thức: $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 20\sqrt{7^2 - 5^2} = \pm 40\sqrt{6} \text{ (cm/s)}$

Ví dụ 10: Một vật có khối lượng 0,5 kg thực hiện đồng thời ba dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số có phương trình: $x_1 = 2\sqrt{3} \cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}$; $x_2 = 4 \cos\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}$;

$x_3 = 8 \cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}$ (với t đo bằng s). Tính cơ năng dao động và độ lớn gia tốc của vật ở vị trí cách vị trí thế năng cực đại gần nhất là 2 cm.

Hướng dẫn:

Tổng hợp theo phương pháp cộng số phức:

$$2\sqrt{3}\angle\frac{\pi}{3} + 4\angle\frac{\pi}{6} + 8\angle\frac{-\pi}{2} \stackrel{\text{shift } 23=}{=} 6\angle-\frac{\pi}{6}$$

Biên độ dao động tổng hợp là 6 cm nên cơ năng dao động :

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 10^2 \cdot 0,06^2 = 0,09 \text{ (J)}$$

Vị trí cách vị trí thế năng cực đại gần nhất là 2 cm, tức là vị trí đó cách vị trí cân bằng $|x| = 6 - 2 = 4 \text{ (cm)}$

Độ lớn gia tốc của vật tính theo công thức: $|a| = \omega^2 |x| = 10^2 \cdot 4 = 400 \text{ (cm/s}^2\text{)}$

Ví dụ 11: Một vật tham gia đồng thời 2 dao động điều hoà cùng phương cùng tần số và vuông pha với nhau. Nếu chỉ tham gia dao động thứ nhất thì vật đạt vận tốc cực đại là v_1 . Nếu chỉ tham gia dao động thứ hai thì vật đạt vận tốc cực đại là v_2 . Nếu tham gia đồng thời 2 dao động thì vận tốc cực đại là

- A. $0,5(v_1 + v_2)$ B. $(v_1 + v_2)$ C. $(v_1^2 + v_2^2)^{0,5}$ D. $0,5(v_1^2 + v_2^2)^{0,5}$

Hướng dẫn: Chọn đáp án C

Vì hai dao động vuông pha nên biên độ dao động tổng hợp: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

Vận tốc cực đại của vật: $v = \omega A = \sqrt{(\omega A_1)^2 + (\omega A_2)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Ví dụ 12: (CĐ-2011) Một vật nhỏ có chuyển động là tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương. Hai dao động này có phương trình là $x_1 = A_1 \cos \omega t$ và $x_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Gọi E là

cơ năng của vật. Khối lượng của vật bằng

- A. $\frac{E}{\omega^2 \sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$ B. $\frac{2E}{\omega^2 \sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$ C. $\frac{E}{\omega^2 (A_1^2 + A_2^2)}$ D. $\frac{2E}{\omega^2 (A_1^2 + A_2^2)}$

Hướng dẫn: Chọn đáp án D

Vì hai dao động vuông pha nên biên độ dao động tổng hợp: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

$$\text{Cơ năng dao động của vật: } E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \Rightarrow m = \frac{2E}{\omega^2 (A_1^2 + A_2^2)}$$

Chú ý: 1) Lực kéo về cực đại: $F_{\max} = kA = m\omega^2 A$

2) Lực đàn hồi cực đại: $F_{dh\max} = k|\Delta l_0 + A|$

Trong đó, Δl_0 là độ biến dạng của lò xo ở vị trí cân bằng:
$$\begin{cases} \Delta l_0 = \frac{mg}{k} \\ \Delta l_0 = \frac{mg \sin \alpha}{k} \end{cases}$$

Ví dụ 13: Con lắc lò xo gồm vật nhỏ nặng 1 kg thực hiện đồng thời hai dao động điều hoà theo phương ngang, theo các phương trình: $x_1 = 5 \cos \pi t (cm)$ và $x_2 = 5 \sin \pi t (cm)$ (Góc tọa độ trùng với vị trí cân bằng, t đo bằng giây, lấy $\pi^2 = 10$). Lực cực đại mà lò xo tác dụng lên vật là

- A. $50\sqrt{2}N$ B. $0,5\sqrt{2}N$ C. $25\sqrt{2}N$ D. $0,25\sqrt{2}N$

Hướng dẫn: Chọn đáp án B

$$\begin{cases} x_1 = 5 \cos \pi t \\ x_2 = 5 \sin \pi t = 5 \cos \left(\pi t - \frac{\pi}{2} \right) \\ k = m\omega^2 = 10 (N/m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0,05\sqrt{2} (m)$$

$$\Rightarrow F_{\max} = k(\Delta l_0 + A) = 10(0 + 0,05\sqrt{2}) = 0,5\sqrt{2} (N)$$

Ví dụ 14: Con lắc lò xo gồm vật nhỏ nặng 1 kg thực hiện đồng thời hai dao động điều hoà theo phương thẳng đứng, theo các phương trình: $x_1 = 5\sqrt{2} \cos 10t (cm)$ và $x_2 = 5\sqrt{2} \sin 10t (cm)$ (Góc tọa độ trùng với vị trí cân bằng, t đo bằng giây và lấy gia tốc trọng trường $g = 10 \text{ m/s}^2$). Lực cực đại mà lò xo tác dụng lên vật là

- A. 10 N. B. 20 N. C. 25 N. D. 0,25 N.

Hướng dẫn: Chọn đáp án B

$$\begin{cases} x_1 = 5\sqrt{2} \cos 10t \\ x_2 = 5\sqrt{2} \sin 10t = 5\sqrt{2} \cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \\ k = m\omega^2 = 100(N/m) \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = 0,1(m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 10(cm) = 0,1(m) \\ F_{\max} = k(\Delta l_0 + A) = 100(0,1 + 0,1) = 20(N) \end{cases}$$

Chú ý: Giả sử ở thời điểm nào đó $x = \frac{A}{n}$ và đang tăng (giảm) để tính giá trị x_1 và x_2 có thể:

Dùng phương pháp vector quay; Giải phương trình lượng giác.

Ví dụ 15: Hai dao động điều hòa cùng phương cùng tần số có phương trình

$$x_1 = 6 \cos\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)(cm) \text{ và } x_2 = 6 \cos\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)(cm). \text{ Tại thời điểm li độ dao động tổng hợp}$$

là 3 cm và đang tăng thì li độ của dao động thứ hai là bao nhiêu?

A. 10 cm.

B. 9 cm.

C. 6 cm.

D. -3 cm.

Hướng dẫn: Chọn đáp án C

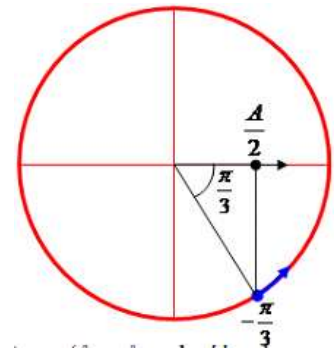
$$\text{Phương trình dao động tổng hợp: } x = x_1 + x_2 = 6\cos\frac{\pi}{6} + 6\cos\frac{5\pi}{6} = 6\cos\frac{\pi}{2}$$

$$= 6\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(cm).$$

Vì $x = 3$ và đang tăng nên pha dao động bằng (ở nửa dưới vòng

$$\text{tròn) } 10t + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow 10t = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x_2 = 6\cos\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) = 6\cos\left(-\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = 6(cm)$$



Chú ý:

1) Hai thời điểm cùng pha cách nhau một khoảng thời gian kT

$$t_2 - t_1 = kT \Rightarrow \Delta\varphi = k2\pi \Rightarrow x_{t_1} = x_{t_2}$$

2) Hai thời điểm ngược pha nhau cách nhau một khoảng $(2k+1)\frac{T}{2}$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = (2k+1)\pi \Rightarrow x_{t_1} = -x_{t_2}$$

3) Hai thời điểm vuông pha nhau cách nhau một khoảng $(2k+1)\frac{T}{4}$

$$t_2 - t_1 = (2k + 1) \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta j = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \sqrt{x_{t_1}^2 + x_{t_2}^2}$$

Ví dụ 16: Một vật thực hiện đồng thời 3 dao động điều hòa cùng pha cùng tần số có phương

trình lần lượt là $x_1 = A_1 \cos\left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) (cm)$, $x_2 = A_2 \cos(2\pi t) (cm)$,

$x_3 = A_3 \cos\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) (cm)$. Tại thời điểm t_1 các giá trị li độ $x_1(t_1) = -10cm$, $x_2(t_1) = 40cm$,

$x_3(t_1) = -20cm$. Thời điểm $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$ các giá trị li độ $x_1(t_2) = -10\sqrt{3}cm$, $x_2(t_2) = 0cm$,

$x_3(t_2) = 20\sqrt{3}cm$. Tìm phương trình của dao động tổng hợp?

A. $x = 30 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

B. $x = 20 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$

C. $x = 40 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

D. $x = 20\sqrt{2} \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$

Hướng dẫn: Chọn đáp án B

Hai thời điểm t_2 và t_1 vuông pha nên biên độ tính theo công thức:

$$A = \sqrt{x_{t_1}^2 + x_{t_2}^2}$$

Với $A_1 = \sqrt{x_{1(t_1)}^2 + x_{1(t_2)}^2} = 20(cm)$; $A_2 = \sqrt{x_{2(t_1)}^2 + x_{2(t_2)}^2} = 40(cm)$

$$A_3 = \sqrt{x_{3(t_1)}^2 + x_{3(t_2)}^2} = 40(cm)$$

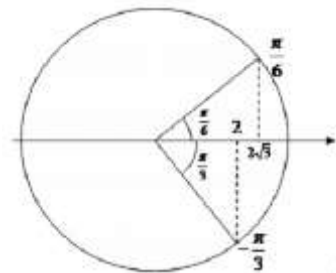
Tổng hợp theo phương pháp cộng số phức:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = A_1 \angle \varphi_1 + A_2 \angle \varphi_2 + A_3 \angle \varphi_3$$

$$20 \angle \frac{2\pi}{3} + 40 + 40 \angle \frac{-2\pi}{3} = 20 \angle \frac{-\pi}{3} \Rightarrow x = 20 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right) (cm)$$

Chú ý: Nếu bài toán cho biết trạng thái của hai dao động thành phần ở cùng một thời điểm nào đó, yêu cầu tìm trạng thái của dao động tổng hợp thì có thể làm theo hai cách (vòng tròn lượng giác và giải phương trình lượng giác).

Ví dụ 17: Hai dao động điều hòa (1) và (2) cùng phương, cùng tần số và cùng biên độ 4 cm. Tại một thời điểm nào đó, dao động (1) có li độ $2\sqrt{3}cm$, đang chuyển động ngược chiều dương, còn dao động (2) có li độ 2 cm theo chiều dương. Lúc đó, dao động tổng hợp của hai dao động trên có li độ bao nhiêu và đang chuyển động theo chiều nào?



- A. $x = 8$ và chuyển động ngược chiều dương.
- B. $x = 5,46$ và chuyển động ngược chiều dương.
- C. $x = 5,46$ và chuyển động theo chiều dương.
- D. $x = 8$ và chuyển động theo chiều dương.

Hướng dẫn: Chọn đáp án B

Cách 1: Chọn thời điểm khảo sát là thời điểm ban đầu $t = 0$ thì phương trình dao động của các

chất điểm lần lượt là:
$$\begin{cases} x_1 = 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ x_2 = 4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Phương trình dao động tổng hợp (bằng phương pháp cộng các hàm lượng giác):

$$x = x_1 + x_2 = 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = 2 \cdot 4 \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$x = 4\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{12}\right) (cm).$$

Tại thời điểm ban đầu li độ tổng hợp $x_0 = x_{01} + x_{02} = 2\sqrt{3} + 2 \approx 5,46 (cm)$.

Pha ban đầu của dao động tổng hợp $-\frac{\pi}{12}$ thuộc góc phần tư thứ IV nên vật đang chuyển động theo chiều dương.

Cách 2:

Li độ tổng hợp: $x = x_1 + x_2 = 2\sqrt{3} + 2 \approx 5,46 cm$

Véc tơ tổng hợp $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ nằm ở góc phần tư thứ IV nên hình chiếu chuyển động theo chiều dương.