§8. BA ĐƯỜNG CÔNIC

I. Đường chuẩn của elip và hypebol.

Không chỉ có parabol mới có đường chuẩn, elip và hypebol cũng có đường chuẩn được định nghĩa tương tự như sau

1. Đường chuẩn của elip.

a. Định nghĩa: Cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Khi đó đường thẳng

$\Delta_1: x+\frac{a}{e}=0$ được gọi là *đường chuẩn* của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c;0)$; Đường thẳng $\Delta_2: x-\frac{a}{e}=0$ được gọi là *đường chuẩn* của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c;0)$.

b. Tính chất: Với mọi điểm M thuộc (E) ta có

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)}=\frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)}=e\ (e<1)$$

2. ***Đường chuẩn của hypebol.***

a. Định nghĩa: Cho (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. các đường thẳng $\Delta_1: x+\frac{a}{e}=0$ và $\Delta_2: x-\frac{a}{e}=0$ gọi là các đường chuẩn của (H) lần lượt tương ứng với các tiêu điểm $F_1(-c;0)$ và $F_2(c;0)$

b. Tính chất: Với mọi điểm M thuộc (E) ta có

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)}=\frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)}=e\ (e>1)$$

II. Định nghĩa ba đường cônic

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M;\Delta)}$ bằng một số dương e cho trước được gọi là ba *đường cônic*

Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ được gọi là đường chuẩn và e gọi là tâm sai của đường cônic.

Chú ý: Elip là đường cônic có tâm sai $e < 1$; parabol là đường cônic có tâm sai $e = 1$; hypebol là đường cônic có tâm sai $e > 1$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1. Nhận dạng cônic và xác định tiêu điểm, đường chuẩn của các đường cônic.

1. Phương pháp giải.

- Để nhận dạng đường cônic ta dựa vào tâm sai: đường cônic có tâm sai $e < 1$ là elip; đường cônic có tâm sai $e = 1$ là parabol; đường cônic có tâm sai $e > 1$ là hypebol.
- Từ phương trình của đường cônic ta xác định được dạng của nó từ đó xác định được tiêu điểm và đường chuẩn của nó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường cônic sau

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{10} = 1$ c) $y^2 = 18x$

Lời giải:

a) Dễ thấy đây là phương trình chính tắc của đường elip

Ta có $\begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 4 = 1$ do đó $c = 1$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy ta có tiêu điểm là $F_1(-1;0)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x + \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 0$ hay $x + 5 = 0$ và tiêu điểm là $F_2(1;0)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x - \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 0$ hay $x - 5 = 0$.

b) Đây là phương trình chính tắc của đường hypebol

Ta có $\begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 17$ do đó $c = \sqrt{17}$,

tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{17}{7}}$

Vậy ta có tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{17};0\right)$ tương ứng có đường chuẩn có

phương trình là $x + \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{\dfrac{17}{7}}} = 0$ hay $x + \dfrac{7}{\sqrt{17}} = 0$ và tiêu điểm là

$F_2\left(\sqrt{17};0\right)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x - \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{\dfrac{17}{7}}} = 0$

hay $x - \dfrac{7}{\sqrt{17}} = 0$.

c) Đây là phương trình chính tắc của parabol

Ta có $2p = 18 \Rightarrow p = 9$

Vậy tiêu điểm là $F\left(\dfrac{9}{2};0\right)$, đường chuẩn có phương trình là $x + \dfrac{9}{2} = 0$.

Ví dụ 2: Cho cônic có tiêu điểm $F\left(-1;1\right)$, đi qua điểm $M\left(1;1\right)$ và đường chuẩn $\Delta : 3x + 4y - 5 = 0$. Cônic này là elip, hypebol hay là parabol?

Lời giải:

Ta có $MF = 2$, $d\left(M;\Delta\right) = \dfrac{\left|3 + 4 - 5\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{2}{5}$

Suy ra $\dfrac{MF}{d\left(M;\Delta\right)} = 5 > 1$ suy ra đây là elip

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.137: Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường cônic sau

a) $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ c) $y^2 = 8x$

Bài 3.138. Cho cônic có tiêu điểm $F\ \ 1;1$, đi qua điểm $M\ \ 1;3$ và đường chuẩn $\Delta : 3x-4y-5=0$. Cônic này là elip, hypebol hay là parabol?

Bài 3.139. Cho cônic có tiêu điểm $F\ \ 1;2$, đi qua điểm $M\ \ 0;1$ và đường chuẩn $\Delta : x-y-1=0$. Cônic này là elip, hypebol hay là parabol?

✍ **DẠNG 2. Viết phương trình đường cônic.**

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào các dạng của đường cônic mà giả thiết đã cho để viết phương trình
- Dựa vào định nghĩa của ba đường cônic

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta : x-y+1=0$ và điểm $F\ \ 1;0$. Viết phương trình của đường cônic nhận F làm tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau

a) Tâm sai $e=\sqrt{3}$ b) Tâm sai $e=\dfrac{1}{2}$ c) Tâm sai $e=1$

Lời giải:

Gọi $M\ \ x;y$ là điểm thuộc đường cônic cần tìm. Khi đó theo định nghĩa ta có

$\dfrac{MF}{d\ \ M;\Delta}=e\Leftrightarrow MF=e.d\ \ M;\Delta$ (*).

Ta có $MF=\sqrt{\ 1-x\ ^2+y^2}$, $d\ \ M;\Delta\ =\dfrac{\left|x-y+1\right|}{\sqrt{2}}$

a) Tâm sai $e=\sqrt{3}$ thì $\ * \ \Leftrightarrow\sqrt{\ 1-x\ ^2+y^2}=\sqrt{3}.\dfrac{\left|x-y+1\right|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2\ \ x^2-2x+1+y^2\ =3\ \ x^2+y^2+1-2xy+2x-2y$

$\Leftrightarrow 2x^2+y^2-6xy+10x-6y+1=0$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm là

$2x^2+y^2-6xy+10x-6y+1=0$

b) Tâm sai $e = \dfrac{1}{2}$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\left|x-y+1\right|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2 - 2x + 1 + y^2\right) = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 3 = 0$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm là

$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 3 = 0$.

c) Tâm sai $e = 1$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \dfrac{\left|x-y+1\right|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y$

$\Leftrightarrow 2xy - 4x + 2y = 0$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm là $2xy - 4x + 2y = 0$.

Ví dụ 2: Cho điểm $A\left(0;\sqrt{3}\right)$ và hai đường thẳng $\Delta: x - 2 = 0$,

$\Delta': 3x - y = 0$

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn là Δ

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc elip là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$

Vì $A\left(0;\sqrt{3}\right)$ là một đỉnh của elip nên $b = \sqrt{3}$

elip có một đường chuẩn là Δ nên $\dfrac{a}{e} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{c} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2c$ (*)

Ta lại có $b^2 = a^2 - c \Rightarrow 3 = a^2 - c \Rightarrow c = a^2 - 3$ thay vào (*) ta có

$a^2 = 2\left(a^2 - 3\right) \Leftrightarrow a^2 = 6$

Vậy phương trình chính tắc elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

b) Gọi phương trình chính tắc elip là $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$

Hypebol có một đường chuẩn là Δ nên $\dfrac{a}{e} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{c} = 2 \Leftrightarrow c = \dfrac{a^2}{2}$ (1)

Hypebol có một đường tiệm cận là Δ' nên $\dfrac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow b = 3a$ (2)

Mặt khác $b^2 = c^2 - a^2$ (3)
Thay (1), (2) vào (3) ta được

$$(3a)^2 = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 - a^2 \Leftrightarrow 10a^2 = \frac{a^4}{4} \Leftrightarrow a^2(40 - a^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 40$$

Suy ra $b^2 = 9a^2 = 360$

Vậy phương trình chính tắc hypebol cần tìm là $\dfrac{x^2}{40} - \dfrac{y^2}{360} = 1$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.140. Cho đường thẳng $\Delta : x - 2y + 1 = 0$ và điểm $F(0;0)$. Viết phương trình của đường cônic nhận F làm tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau

a) Tâm sai $e = \sqrt{2}$ b) Tâm sai $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ c) Tâm sai $e = 1$

Bài 3.141. Cho điểm $A(3;0)$ và hai đường thẳng $\Delta : x - 3 = 0$, $\Delta' : 2x - y = 0$

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn là Δ

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.

✍ DẠNG 3. Sự tương giao gữa các đường cônic và với các đường khác.

1. Phương pháp giải.

Cho hai đường cong $f(x;y) = a$, $g(x;y) = b$ khi đó

- Số giao điểm của hai đường cong trên chính là số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f(x;y) = a \\ g(x;y) = b \end{cases}$

- Tọa độ giao điểm(nếu có) của hai đường cong là nghiệm của hệ $\begin{cases} f(x;y) = a \\ g(x;y) = b \end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta : 2x - y + m = 0$, elip (E): $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

và hypebol (H): $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

a) Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt ?

b) Chứng minh rằng với mọi m thì Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (H)

c) Tìm tọa độ giao điểm của (E) và (H). Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm đó.

Lời giải:

a) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + m = 0 \\ \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + m \\ 9x^2 + 8mx + 2m^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Do đó Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $9x^2 + 8mx + 2m^2 - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta' = 16m^2 - 9(2m^2 - 6) > 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{3} < m < 3\sqrt{3}$.

b) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + m = 0 \\ \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + m \\ 7x^2 - 2mx - m^2 - 8 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do $ac = -7.(m^2 + 8) < 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu suy ra Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu nhau

Vậy Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (H)

c) Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ \dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1 \end{cases} \quad I$

Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{22}{17}} \\ y=\pm 2\sqrt{\dfrac{10}{17}} \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ (I) nên thỏa mãn phương trình

$27\left(\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}\right)+4\left(\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}\right)=31$ hay $x^2+y^2=\dfrac{62}{17}$

Vậy tọa độ giao điểm của (E) và (H) là

$M_1\left(\sqrt{\dfrac{22}{17}};2\sqrt{\dfrac{10}{17}}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{\dfrac{22}{17}};2\sqrt{\dfrac{10}{17}}\right)$, $M_3\left(\sqrt{\dfrac{22}{17}};-2\sqrt{\dfrac{10}{17}}\right)$, $M_4\left(-\sqrt{\dfrac{22}{17}};-2\sqrt{\dfrac{10}{17}}\right)$

và phương trình đường tròn đi qua các điểm đó phương trình là

$x^2+y^2=\dfrac{62}{17}$

Nhận xét: Để viết phương trình đường tròn qua giao điểm của (E) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, (H) $\dfrac{x^2}{a'^2}-\dfrac{y^2}{b'^2}=1$

ta chọn α,β sao cho $\dfrac{\alpha}{a^2}+\dfrac{\beta}{a'^2}=\dfrac{\alpha}{b^2}-\dfrac{\beta}{b'^2}=k>0,\ \alpha+\beta>0$ khi đó

phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2=\dfrac{\alpha+\beta}{k}$

Ví dụ 2: Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và điểm I(1; 2). Viết phương trình đường thẳng đi qua I biết rằng đường thẳng đó cắt elip tại hai điểm A, B mà I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải:

Cách 1: Đường thẳng Δ đi qua I nhận $\vec{u}\ \ a;b$ làm vectơ chỉ phương có dạng $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \end{cases}$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$)

$A,\ B \in \Delta$ suy ra tọa độ $A,\ B$ có dạng $A = (1 + at_1; 2 + bt_1)$,

$B = (1 + at_2; 2 + bt_2)$.

I là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2x_I = x_A + x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ \ t_1 + t_2\ \ = 0 \\ b\ \ t_1 + t_2\ \ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \text{ (1)}$$

(do $a^2 + b^2 \neq 0$)

$A,\ B \in\ \ E$ nên $t_1,\ t_2$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1+at)^2}{16} + \frac{(2+bt)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow\ \ 9a^2 + 16b^2\ \ t^2 + 2\ \ 9a + 32b\ \ t - 139 = 0$$

Theo định lý Viet ta có $t_1 + t_2 = 0 \Leftrightarrow 9a + 32b = 0$

Ta có thể chọn $b = -9$ và $a = 32$.

Vậy đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{32} = \dfrac{y-2}{-9}$ hay

$9x + 32y - 73 = 0$

Cách 2: Vì I thuộc miền trong của elip (E) nên lấy tùy ý điểm $A(x;y) \in (E)$ thì đường thẳng IM luôn cắt (E) tại điểm thứ hai là $B\ \ x';y'$.

I là trung điểm điểm AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2x_I = x_A + x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Rightarrow M'\ \ 2 - x; 4 - y$$

$$M, M' \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{(2-x)^2}{16} + \dfrac{(4-y)^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{4-4x}{16} + \dfrac{16-8y}{9} = 0$ hay $9x + 32y - 73 = 0$ (*)

Tọa độ điểm M, I thỏa mãn phương trình (*) nên đường thẳng cần tìm là $9x + 32y - 73 = 0$

Nhận xét: Bài toán tổng quát " Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ a>b>0$ và điểm $I(x_0;y_0)$ với $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$ (nghĩa là điểm I thuộc miền trong của elíp) . Viết phương trình đường thẳng đi qua I , biết rằng đường thẳng đó cắt elíp tại hai điểm M , M’ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM’ ".

Làm tương tự cách 2 ta có phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\frac{4x_0^2-4x_0x}{a^2}+\frac{4y_0^2-4y_0y}{b^2}=0$$

Ví dụ 3: Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ và hai đường thẳng

$\Delta: x+my=0,\ \Delta': mx-y=0$

a) Tìm m để Δ và Δ' đều cắt (H) tại hai điểm phân biệt

b) Xác định m diện tích tứ giác tạo bởi bốn giao điểm của Δ, Δ' và (H) đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Từ phương trình Δ thế $x=-my$ vào phương trình (H) ta được

$$\left(\frac{m^2}{4}-\frac{1}{9}\right)y^2=1 \ (*)$$

Suy ra Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt hay

$$\frac{m^2}{4}-\frac{1}{9}>0 \Leftrightarrow m^2>\frac{4}{9} \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

Tương tự từ phương trình Δ thế $y=mx$ vào phương trình (H) ta được

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{m^2}{9}\right)x^2=1$$

Suy ra Δ' cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\frac{1}{4}-\frac{m^2}{9}>0 \Leftrightarrow m^2<\frac{9}{4} \Leftrightarrow m\in\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$$

Vậy Δ và Δ' đều cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $m \in \left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$

b. Với $m \in \left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ thì Δ và Δ' cắt (H) tại bốn điểm phân biệt (**)

Dễ dàng tìm được giao điểm Δ và (H) là $A\left(\frac{-6m}{\sqrt{9m^2-4}};\frac{6}{\sqrt{9m^2-4}}\right); C\left(\frac{6m}{\sqrt{9m^2-4}};\frac{-6}{\sqrt{9m^2-4}}\right)$ và giao điểm Δ' và (H) là $B\left(\frac{-6}{\sqrt{9-4m^2}};\frac{-6m}{\sqrt{9-4m^2}}\right); D\left(\frac{6}{\sqrt{9-4m^2}};\frac{6m}{\sqrt{9-4m^2}}\right)$ A đối xứng với C và B đối xứng với D qua gốc toạ độ O. Mặt khác $\Delta \perp \Delta'$ do đó tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Suy ra $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{72\left(m^2+1\right)}{\sqrt{\left(9m^2-4\right)\left(9-4m^2\right)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$S_{ABCD} = \frac{72\left(m^2+1\right)}{\sqrt{\left(9m^2-4\right)\left(9-4m^2\right)}} \geq \frac{144.\left(m^2+1\right)}{\left(9m^2-4\right)+\left(9-4m^2\right)} = \frac{144}{5}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $9m^2-4 = 9-4m^2 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (thỏa mãn (**))

Vậy $m = \pm 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2 = 8x$. Đường thẳng Δ không trùng với trục Ox đi qua tiêu điểm F của (P) sao cho góc hợp bởi hai tia Fx và Ft là tia của Δ nằm phía trên trục hoành một góc bằng $\alpha\left(\alpha \neq 90^0\right)$. Chứng minh rằng Δ Cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N và tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi α thay đổi.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có $F\left(2;0\right)$, đường thẳng Δ có hệ số góc $k = \tan\alpha$

Suy ra $\Delta : y = \; x - 2 \; .\tan\alpha$. Xét hệ phương trình $\begin{cases} y = \; x - 2 \; \tan\alpha \\ y^2 = 8x \end{cases}$

(*)

Suy ra $\tan\alpha . y^2 - 8y - 16\tan\alpha = 0$ (**)

$\Delta' = 16 + 16\tan^2\alpha > 0$ do đó phương trình (**) luôn có hai nghiệm phân biệt, hệ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt điều này chứng tỏ rằng Δ Cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Gọi tọa độ hai giao điểm đó là $M \; x_M; y_M \;$, $N \; x_N; y_N \;$; $I \; x_I; y_I \;$ là trung điểm của MN

Theo định lý Viét ta có:

$$y_M + y_N = \frac{8}{\tan\alpha} > 0 \Rightarrow y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{4}{\tan\alpha}.$$

Mặt khác từ (*) ta có

$$y_M + y_N = \; x_M + x_N - 4 \; \tan\alpha \Rightarrow x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{4}{\tan^2\alpha} + 2$$

Suy ra $x_I = 4.\left(\frac{y_I}{4}\right)^2 + 2$ hay $y_I^2 = 4x_I + 8$

Vậy tập hợp điểm I là đường cong có phương trình : $y^2 = px + \frac{p^2}{2}$

.(Cũng gọi là Parapol)

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.142: Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

a) Xác định m để đường thẳng $d : y = x + m$ và (E) có điểm chung

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua $M\;\;1;1$ và cắt (E) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

Bài 3.143: Cho (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $\Delta: 3x+4y-12=0$
a) Chứng minh rằng Δ cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB
b) Tìm toạ độ C thuộc (E) sao cho ΔABC cân tại A(biết hoành độ A bé hơn hoành độ B)

Bài 3.144: Cho (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và hai đường thẳng

$\Delta_1: mx-nx=0$, $\Delta_2: nx+my=0$, $m^2+n^2\neq 0$

a) Xác định giao điểm M, N của Δ_1 với (E) và P, Q của Δ_2 với (E)

b) Tính theo m, n diện tích tứ giác $MPNQ$

c) Tìm điều kiện m, n để diện tích tứ giác $MPNQ$ nhỏ nhất

Bài 3.145: (KB 2010) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A\;\;2;\sqrt{3}$ và elip (E): $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF_2.

Bài 3.146: Cho (H): $x^2-4y^2=20$ và đường thẳng $\Delta: x-3y=0$
a) Chứng minh rằng Δ cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tính độ dài của đoạn AB.
b) Tìm toạ độ điểm C thuộc (H) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.
c) Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M\;\;0;2$ sao cho d cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.
Bài 3.147: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho Hypebol

$H\;\;:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ và đường thẳng $d: x+3y+2007=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết rằng Δ vuông góc với d và Δ cắt H tại hai điểm M, N thoả mãn $MN = 2\sqrt{10}$.

Bài 3.148: Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một đường thẳng Δ cắt (H) tại M, N cắt hai tiệm cận tại P,Q. Chứng minh $PM = NQ$.

Bài 3.149: Trên mặt phẳng Oxy, cho (E) là một elip di động nhưng luôn nhận hai tiêu điểm của hypebol (H): $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ làm các tiêu điểm và luôn có điểm chung với đường thẳng $\Delta : x - y + 6 = 0$. Tìm giá trị bé nhất của độ dài trục lớn của elip (E).

Bài 3.150: Cho (P): $y^2 = 12x$ và đường thẳng $d : mx - y - 3m = 0$
$m \neq 0$

a) Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$, d luôn đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B

b) Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn của (P).

Bài 3.151: Cho (P): $y^2 = 2px$ có tiêu điểm F. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2 qua F và vuông góc với nhau. Δ_1 cắt (P) tại M, N; Δ_2 cắt (P) tại P, Q. Chứng minh rằng $S_{MNPQ} \geq 8p^2$

Bài 3.152: Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P): $y = x^2 - 2x$ và elip (E): $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.Chứng minh rằng (P) cắt (E) tại bốn điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn.Viết phương trình đường tròn đó.

Bài 3.153: Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm M 3;2 . Đường thẳng Δ đi qua M cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 3MB$, xác định tọa độ các điểm A, B.

Bài 3.154: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d : 2x + y + 3 = 0$ và elíp $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$ Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với *d* và cắt (*E*) tại hai điểm *A*, *B* sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.

Dạng 4. Các bài toán định tính về ba đường cônic.

1. Phương pháp giải.

Dựa vào phương trình chính tắc của ba đường cônic và giả thiết để thiết lập và chứng minh một số các tính chất của ba đường cônic.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và hai điểm M, N thuộc (E) sao cho OM vuông góc với ON. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

b) Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải.

a) + Dễ thấy một trong hai điểm trùng với bốn đỉnh của (E) thì đẳng thức hiển nhiên đúng

+ Nếu cả hai điểm không trùng với các đỉnh của (E):

Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$, $N\left(x_N;y_N\right)$, $k\ \left(k\neq 0\right)$ là hệ số góc của đường thẳng OM thì hệ số góc của ON là $-\frac{1}{k}$ (vì OM vuông góc với ON).

Do $M, N\in (E)$ nên $\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$ (1), $\frac{x_N^2}{a^2}+\frac{y_N^2}{b^2}=1$ (2)

Đường thẳng OM có phương trình là $y=kx$ suy ra $y_M=kx_M$ (3)

Đường thẳng ON có phương trình là $y=-\frac{1}{k}x$ suy ra $y_N=-\frac{1}{k}x_N$ (4)

Thay (3) vào (1) suy ra

$$\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{k^2x_M^2}{b^2}=1\Leftrightarrow x_M^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=1\Leftrightarrow x_M^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$$

$$\Rightarrow y_M^2 = k^2 x_M^2 = \frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2 + b^2}$$

Do đó $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = \dfrac{a^2b^2 \ \ k^2 + 1}{a^2k^2 + b^2}$

Tương tự thay (4) vào (2) suy ra

$$\frac{x_N^2}{a^2} + \frac{\frac{1}{k^2}x_N^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_N^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{k^2b^2}\right) = 1 \Leftrightarrow x_N^2 = \frac{a^2k^2b^2}{a^2 + k^2b^2}$$

$$\Rightarrow y_N^2 = \frac{1}{k^2}x_N^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + k^2b^2}$$

Do đó $ON^2 = x_N^2 + y_N^2 = \dfrac{a^2b^2 \ \ k^2 + 1}{a^2 + k^2b^2}$

Suy ra

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{b^2 + k^2a^2}{a^2b^2 \ \ k^2 + 1} + \frac{a^2 + k^2b^2}{a^2b^2 \ \ k^2 + 1} = \frac{a^2 + b^2 \ \ k^2 + 1}{a^2b^2 \ \ k^2 + 1} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

.

Vậy $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

b) Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng MN khi đó OH là đường cao của tam giác vuông MON. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính

$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ví dụ 2. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ có các tiêu điểm $F_1,\ F_2$. Lấy M là điểm bất kì trên (H). Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là hằng số.

Lời giải.

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

$\Delta_1 : y=\frac{b}{a}x$ hay $bx-ay=0$

$\Delta_2 : y=-\frac{b}{a}x$ hay $bx+ay=0$

Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)$ khi đó theo công thức khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng ta có

$$d\left(M;\Delta_1\right)=\frac{\left|bx_M-ay_M\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\ d\left(M;\Delta_2\right)=\frac{\left|bx_M+ay_M\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Suy ra

$$d\left(M;\Delta_1\right)d\left(M;\Delta_2\right)=\frac{\left|bx_M-ay_M\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{\left|bx_M+ay_M\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2x_M^2-a^2y_M^2}{a^2+b^2}$$

Mặt khác M thuộc (H) nên : $\frac{{x_M}^2}{a^2}-\frac{{y_M}^2}{b^2}=1$ hay $b^2x_M^2-a^2y_M^2=a^2b^2$

Do đó $d\left(M;\Delta_1\right)d\left(M;\Delta_2\right)=\frac{a^2.b^2}{a^2+b^2}$ là hằng số

Ví dụ 3. Cho parabol (P): $y^2=2ax$. Đường thẳng Δ bất kỳ đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k\left(k\neq 0\right)$ cắt (P) tại M và N. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M và N đến trục Ox là hằng số.

Lời giải

Tiêu điểm $F\left(a;0\right)$. Vì đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k\neq 0$ nên có phương trình: $\Delta : y=k\left(x-\frac{a}{2}\right)$

Hoành độ giao điểm của Δ và (P) là nghiệm của phương trình:

$$k^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 = 2ax \Leftrightarrow 4k^2x^2 - 4\left(2a+k^2a\right)x + k^2a^2 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = 4\left(2a+k^2a\right)^2 - 4k^4a^2 = 16a^2\left(1+k^2\right) > 0$$

Theo định lý Viet có $x_M.x_N = \frac{a^2}{4}$

Mặt khác ta có $d\left(M;Ox\right) = \left|y_M\right|;\ d\left(N;Ox\right) = \left|y_N\right|$

Suy ra $d\left(M;Ox\right).d\left(N;Ox\right) = \left|y_M.y_N\right| = \sqrt{4a^2\left|x_M.x_N\right|} = a^2$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.155: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>b>0\right)$ với các tiêu điểm $F_1,\ F_2$ và $A_1,\ A_2$ là các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tùy ý trên (E) có hình chiếu trên Ox là H . Chứng minh rằng

a) $OM^2 + MF_1.MF_2 = a^2 + b^2$

b) $\left(MF_1 - MF_2\right)^2 = 4\left(OM^2 - b^2\right)$

c) $a^2HM^2 + b^2\overline{HA_1}.\overline{HA_2} = 0$

Bài 3.156: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>b>0\right)$, tiêu điểm $F\left(c;0\right)$, một đường thẳng Δ quay quanh F, cắt (E) tại M, N. Chứng minh rằng $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$ không đổi.

Bài 3.157: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>b>0\right)$ với các tiêu điểm $F_1,\ F_2$. M là điểm chạy trên (E). Phân giác góc F_1MF_2 cắt F_1F_2 tại N, H là hình chiếu của N trên MF_1. Chứng minh rằng MH không đổi.

Bài 3.158: Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với các tiêu điểm F_1, F_2 và A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tùy ý trên (H) có hình chiếu trên Ox là H . Chứng minh rằng

a) $OM^2-MF_1.MF_2=a^2-b^2$

b) $(MF_1+MF_2)^2=4(OM^2+b^2)$

c) $a^2HM^2=b^2\overline{HA_1}.\overline{HA_2}$

Bài 3.159: Cho (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với các tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ và đường tròn (C): $x^2+y^2=a^2$, Δ là một trong hai tiệm cận của (H), Δ cắt (C) tại E_1, E_2 $(x_{E_1}<0;x_{E_2}>0)$. Một đường thẳng song song với trục tung cắt (H) tại M và cắt Δ tại N. Chứng minh rằng $NE_1=MF_1; NE_2=MF_2$.

Bài 3.160: Cho parabol (P) : $y^2=2px$ $(p>0)$ và đường thẳng Δ đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm M và N. Gọi $\alpha=(\vec{i};\overrightarrow{FM})$ $(0<\alpha<\pi)$

a) Tính FM, FN theo p và α

b) Chứng minh rằng khi Δ quay quanh F thì $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$ không đổi

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi α thay đổi

Bài 3.161: Cho parabol (P) có đường chuẩn Δ và tiêu điểm F. Gọi M, N là hai điểm trên (P) sao cho đường tròn đường kính MN tiếp xúc với Δ. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua F

Bài 3.162: (ĐH 2008D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2=16x$ và điểm $A(1;4)$. hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC}=90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng

BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3.163: Cho đường tròn đường kính AB tâm O. Một dây cung MN chuyển động và luôn vuông góc với AB tại H, I là điểm thuộc đoạn HM sao cho $HI = k.HM,\ 0 < k < 1$. Tìm tập hợp điểm I.

Bài 3.164: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol (P): $y^2 = 4x$. M là một điểm di động trên (P). $M \neq O$, T là một điểm trên (P) sao cho $T \neq O,\ OT$ vuông góc với OM.

a. Chứng minh rằng khi M di động trên (P) thì đường thẳng MT luôn đi qua một điểm cố định.

b. Chứng minh rằng khi M di động trên (P) thì thì trung điểm I của MT chạy trên 1 parabol cố định .

Bài 3.165: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho parabol $(P): y^2 = 4x$ có tiêu điểm *F*. Gọi *M* là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{FM} = -3\overrightarrow{FO}$; d là đường thẳng bất kì đi qua *M*, *d* cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt *A* và *B*. Chứng minh rằng tam giác OAB là tam giác vuông.