CHUYÊN ĐỀ I: ỨNG DỤNG VECTƠ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

Phương pháp chung

Để giải một bài toán tổng hợp bằng phương pháp vectơ ta thường thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Chuyển giả thiết và kết luận của bài toán sang ngôn ngữ của vectơ, chuyển bài toán tổng hợp về bài toán vectơ.

Bước 2: Sử dụng các kiến thức vectơ để giải quyết bài toán đó.

Bước 3: Chuyển kết quả bài toán vectơ sang kết quả bài toán tổng hợp.

Sau đây là một số dạng toán thường gặp

I. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH VÀ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG CỐ ĐỊNH.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng ta chứng minh hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, tức là tồn tại số thực k sao cho: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Để chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định ta đi chứng minh ba điểm A, B, H thẳng hàng với H là một điểm cố định.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi có hai số thực α, β có tổng bằng 1 sao cho: $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

* Nếu A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$. Đặt $\alpha = 1-k$; $\beta = k \Rightarrow \alpha + \beta = 1$ và

$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$.

* Nếu $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ với $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA}$ Suy ra M, A, B thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho góc xOy . Các điểm A, B thay đổi lần lượt nằm trên Ox, Oy sao cho $OA + 2OB = 3$. Chứng minh rằng trung điểm I của AB thuộc một đường thẳng cố định.

Định hướng: Ta có hệ thức vectơ xác định điểm I là $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ (*)

Từ *ví dụ 1* ta cần xác định hai điểm cố định A', B' sao cho $\overrightarrow{OI} = \alpha\overrightarrow{OA'} + \beta\overrightarrow{OB'}$ với $\alpha + \beta = 1$. Do đó từ hệ thức (*) ta nghĩ tới việc xác định hai điểm cố định A', B' lần lượt trên Ox, Oy

Ta có $* \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{OA}{2OA'}\overrightarrow{OA'} + \frac{OB}{2OB'}\overrightarrow{OB'}$. từ đó ta cần chọn các điểm đó sao cho $\frac{OA}{2OA'} + \frac{OB}{2OB'} = 1$. Kết hợp với giả thiết $OA + 2OB = 3$ ta chọn được điểm A' và B' sao cho $OA' = \frac{3}{2}, OB' = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Trên Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A', B' sao cho $OA' = \frac{3}{2}, OB' = \frac{3}{4}$.

Do I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{OA}{2OA'}\overrightarrow{OA'} + \frac{OB}{2OB'}\overrightarrow{OB'}$

Ta có $\frac{OA}{2OA'} + \frac{OB}{2OB'} = \frac{OA}{2.\frac{3}{2}} + \frac{OB}{2.\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ OA + 2OB\ \ = 1$

Do đó điểm I thuộc đường thẳng A'B' cố định.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$, I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm thuộc đoạn AC thỏa mãn $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Định hướng: Để chứng minh D, E, I thẳng hàng ta đi tìm số k sao cho $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{DI}$, muốn vậy ta sẽ phân tích các vectơ $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DI}$ qua hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ và sử dụng nhận xét " $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$ với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương " từ đó tìm được $k = \frac{2}{3}$.

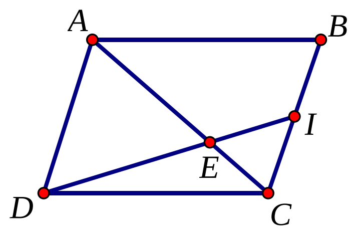
Lời giải (hình 1.35)

Ta có $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (1)

Mặt khác theo giả thiết ta có $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ suy ra

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\ \ = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}(2)$$



Hình 1.35

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

Vậy ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Ví dụ 4: Hai điểm *M, N* chuyển động trên hai đoạn thẳng cố định *BC* và *BD* ($M \neq B,\ N \neq B$) sao cho $2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN} = 10$

Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Dễ thấy luôn tồn tại điểm I thuộc MN sao cho $2\frac{BC}{BM}\overrightarrow{IM} + 3\frac{BD}{BN}\overrightarrow{IN} = \vec{0}\ \ \ 1$.

Gọi H là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{HC}+3\overrightarrow{HD}=\vec{0}$ 2 do đó H cố định.

Ta có 2 $\Leftrightarrow 5\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \frac{2BC}{BM}\overrightarrow{BM}+\frac{3BD}{BN}\overrightarrow{BN}=5\overrightarrow{BH}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2BC}{BM}\ \overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\ +\frac{3BD}{BN}\ \overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IN}\ =5\overrightarrow{BH}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\frac{BC}{BM}+3\frac{BD}{BN}\right)\overrightarrow{BI}=5\overrightarrow{BH}\text{ (theo (1))}$$

$$\Leftrightarrow 10\overrightarrow{BI}=5\overrightarrow{BH}\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}\ (3)$$

Do các điểm B, H cố định, nên điểm I cố định.(xác định bởi hệ thức (3))

Ví dụ 5: Cho ba dây cung song song AA_1, BB_1, CC_1 của đường tròn (O). Chứng minh rằng trực tâm của ba tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1 nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1

Ta có: $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}$

và $\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}$

Suy ra $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{H_1H_3}=\overrightarrow{OH_3}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{BB_1}$

Vì các dây cung AA_1, BB_1, CC_1 song song với nhau

Nên ba vecto $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ có cùng phương

Do đó hai vecto $\overrightarrow{H_1H_2}$ và $\overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương hay ba điểm H_1, H_2, H_3 thẳng hàng.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.101: Cho tam giác ABC và các điểm M là trung điểm AB, N thuộc cạnh AC sao cho $AN=\frac{2}{3}AC$, P là điểm đối xứng với B qua C. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 1.102: Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM=\frac{1}{3}AB,\ AN=\frac{3}{4}AC$. Gọi O là giao điểm của CM và BN. Trên đường thẳng BC lấy E . Đặt $\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BC}$.

Tìm x để A, O, E thẳng hàng.

Bài 1.103: Cho ΔABC lấy các điểm I, J thoả mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng IJ đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 1.104: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N di động thỏa mãn
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

a) Chứng minh rằng MN đi qua điểm cố định.

b) P là trung điểm của AN. Chứng minh rằng MP đi qua điểm cố định.

Bài 1.105: Cho hai điểm M,P là hai điểm di động thỏa mãn $\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$. Chứng minh rằng MP đi qua điểm cố định.

Bài 1.106. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của D qua điểm A, F là điểm đối xứng của tâm O của hình bình hành qua điểm C và K là trung điểm của đoạn OB. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng và K là trung điểm của EF.

Bài 1.107: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$; $A_2.B_2,C_2$ lần lượt là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1. Gọi G, G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

Chứng minh rằng G, G_1, G_2 thẳng hàng và tính $\dfrac{GG_1}{GG_2}$.

Bài 1.108. Cho tam giác ABC .Các điểm M, N, P lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = \gamma\overrightarrow{PB}$.

Tìm điều kiện của α, β, γ để M, N, P thẳng hàng.

Bài 1.109: Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng trung điểm hai đường chéo AC, BD và tâm O thẳng hàng.

Bài 1.110: Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O thỏa mãn $AB = CD = EF$. Về phía ngoài lục giác dựng các tam giác AMB, BNC, CPD, DQE, ERF, FSA đồng dạng và cân tại M, N, P, Q, R, S. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trọng tâm tam giác MPR và NQS. Chứng minh rằng ba điểm O, O_1, O_2 thẳng hàng.

II. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đường thẳng AB song song với CD ta đi chứng minh $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ và điểm A không thuộc đường thẳng CD.
- Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta có thể chứng minh theo hai hướng sau:

+ Chứng minh mỗi đường thẳng cùng đi qua một điểm cố định.

+ Chứng minh một đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng còn lại

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP và NQ.

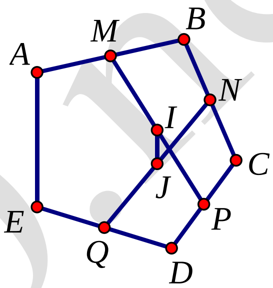
Chứng minh rằng IJ song song với AE

Lời giải (hình 1.36)

Ta có $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}$

$=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}\ \ +\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$



Hình 1.36

Suy ra IJ song song với AE

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC.Các điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB thỏa mãn $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, $\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\gamma\overrightarrow{NC}+\alpha\overrightarrow{NA}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}=\vec{0}$ thì AM, BN, CP đồng quy tại O, với O là điểm được xác định bởi $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

Lời giải

Ta có $\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\beta\ \ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\ \ +\gamma\ \ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\ \ =\vec{0}$

$\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\ \ \beta+\gamma\ \ \overrightarrow{MO}=\alpha\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow\ \ \beta+\gamma\ \ \overrightarrow{MO}=\alpha\overrightarrow{OA}$

Suy ra M, O, A thẳng hàng hay AM đi qua điểm cố định O
Tương tự ta có BN, CP đi qua O
Vậy ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy

Ví dụ 3: Cho sáu điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là một tam giác có ba đỉnh lấy trong sáu điểm đó và Δ' là tam giác có ba đỉnh còn lại. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' đồng quy.

Định hướng. Giả sử sáu điểm đó là *A, B, C, D, E, F*.

Ta cần chứng minh tồn tại một điểm *H* cố định sao cho với các cách chọn Δ khác nhau thì *H* thuộc các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ'. Nếu Δ là tam giác *ABC* thì Δ' là tam giác *DEF*. Gọi *G* và *G'* lần lượt là trọng tâm của tam giác *ABC* và tam giác *DEF*.

H thuộc đường thẳng GG' khi có số thực *k* sao cho $\overrightarrow{HG}=k\overrightarrow{HG'}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})=\frac{k}{3}(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HF})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}-\frac{k}{3}\overrightarrow{HD}-\frac{k}{3}\overrightarrow{HE}-\frac{k}{3}\overrightarrow{HF}=\vec{0}$$

Vì vai trò của các điểm *A, B, C, D, E, F* trong bài toán bình đẳng nên chọn *k* sao cho

$-\frac{k}{3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow k=-1$ khi đó $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HF}=\vec{0}$

Lời giải

Gọi H là trọng tâm sáu điểm A, B, C, D, E, F khi đó

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HF}=\vec{0}$ *

Giả sử G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC, DEF suy ra

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}, \overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}=\vec{0}$

Suy ra

$* \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{HG'}+\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HG'}$

Do đó GG' đi qua điểm cố định H do đó các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' đồng quy.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.111: Cho tứ giác $ABCD$, gọi K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và tam giác BCD. Chứng minh rằng hai đường thẳng KL và AD song song với nhau

Bài 1.112: Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{C_1A}{C_1B}=k\ \ k>0$. Trên các cạnh B_1C_1, C_1AB_1, A_1B_1 lần lượt lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $\frac{A_2B_1}{A_2C_1}=\frac{B_2C_1}{B_2A_1}=\frac{C_2A_1}{C_2B_1}=\frac{1}{k}$. Chứng minh rằng tam giác $A_2B_2C_2$ có các cạnh tương ứng song song với các cạnh của tam giác ABC.

Bài 1.113: Trên đường tròn cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua trọng tâm của ba trong năm điểm đó kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm còn lại. Chứng minh rằng mười đường thẳng nhận được cắt nhau tại một điểm.

Bài 1.114. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Kẻ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC. Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét về điểm đồng quy và hai điểm I, O (I là giao điểm của MP và NQ).

Bài 1.115: Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là một tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng θ. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau các đường thẳng nối trọng tâm tam giác Δ và trung điểm đoạn thẳng θ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.116: Cho tam giác ABC. Ba đường thẳng x, y, z lần lượt đi qua A, B, C và chúng chia đôi chu vi tam giác ABC.
Chứng minh rằng x, y, z đồng quy .
Bài 1.117: Cho tam giác ABC, các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tương ứng tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P.Chứng minh AM, BN, CP cùng đi qua một điểm, xác định điểm đó.
Bài 1.118 : Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA
a) Gọi G là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
b) Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng $AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1$ đồng quy tại điểm G.
Bài 1.119: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là một điểm tùy ý. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với M qua các trung điểm I, J, K của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng
a) Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường
b) M, G, O thẳng hàng và $\frac{MO}{MG}=\frac{3}{2}$.
Bài 1.120: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB. Gọi Δ_a là đường thẳng đi qua trung điểm PN và vuông góc với BC, Δ_b là đường thẳng đi qua trung điểm PM và vuông góc với AC, Δ_c là đường thẳng đi qua trung điểm MN và vuông góc với AB. Chứng minh rằng Δ_a, Δ_b và Δ_c đồng quy.
Bài 1.121: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ sắp xếp sao cho B' thuộc cạnh AB, D' thuộc cạnh AD. Chứng minh rằng các đường thẳng DB', CC', BD' đồng quy.

III. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỈ SỐ ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG.

1. Phương pháp.

Phân tích vectơ qua hai vectơ không cùng phương và sử dụng các kết quả sau:

Cho $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương khi đó

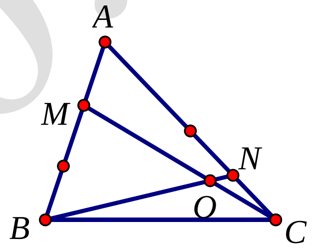
- Với mọi vectơ $\vec{x}$ luôn tồn tại duy nhất các số thực m, n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$
- $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$
- Nếu $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}, \vec{c'} = m'\vec{a} + n'\vec{b}, m'.n' \neq 0$ và $\vec{c}, \vec{c'}$ là hai vectơ cùng phương thì $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB,\ AN = \frac{3}{4}AC$. Gọi O là giao điểm của CM và BN.

Tính tỉ số $\frac{ON}{OB}$ và $\frac{OM}{OC}$

Lời giải (hình 1.37)



Hình 1.37

Giả sử $\overrightarrow{ON} = n\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{CM}$

Ta có $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AM} - m\overrightarrow{CM}$

$= \overrightarrow{AM} - m(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$;

Và $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{AN} - n\overrightarrow{BN}$

$= \overrightarrow{AN} - n(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}(1-n)\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AB}$

Vì $\overrightarrow{AO}$ chỉ có một cách biểu diễn duy nhất qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(1-m) = n \\ \frac{3}{4}(1-n) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{9} \end{cases}.$$

Vậy $\frac{ON}{OB} = \frac{1}{9}$ và $\frac{OM}{OC} = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$. M thuộc đường chéo AC sao cho $AM = kAC$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm P, Q sao cho $MP//BC,\ MQ//AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP.

Tính tỉ số $\frac{AN}{AQ}$ và $\frac{CN}{CP}$ theo k.

Lời giải (hình 1.38)

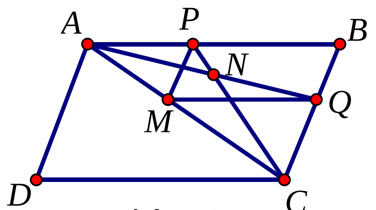
Đặt $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CP}$, ta có:

$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{AQ}$

$= \overrightarrow{DA} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ})$

$= \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} + x\dfrac{BQ}{BC}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - x\dfrac{BQ}{BC}\overrightarrow{DA}$



Hình 1.38

Vì $MQ//AB \Rightarrow \dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{AM}{AC} = k$ nên $\overrightarrow{DN} = (1-kx)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{DC} + y(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP})$

$= \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} + y\dfrac{BP}{BA}\overrightarrow{BA}$

Vì $MP//BC \Rightarrow \dfrac{BP}{BA} = \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CA - AM}{CA} = 1-k$ nên

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} - y(1-k)\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{DA} + (1+ky-y)\overrightarrow{DC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\begin{cases} y = 1-kx \\ x = 1+ky-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{k^2-k+1} \\ y = \dfrac{1-k}{k^2-k+1} \end{cases}$.

Do đó $\dfrac{AN}{AQ} = \dfrac{k}{k^2-k+1}$ và $\dfrac{CN}{CP} = \dfrac{1-k}{k^2-k+1}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AB và AC lấy các điểm B’ và C’ . Gọi M' là giao điểm của B'C' và AM. Chứng minh: $\dfrac{AB}{AB'} + \dfrac{AC}{AC'} = 2\dfrac{AM}{AM'}$.

Lời giải (hình 1.39)

Đặt $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB'}$; $\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AC'}$; $\overrightarrow{AM} = z\overrightarrow{AM'}$

Vì $M' \in B'C' \Rightarrow \exists k : \overrightarrow{B'M'} = k\overrightarrow{B'C'}$

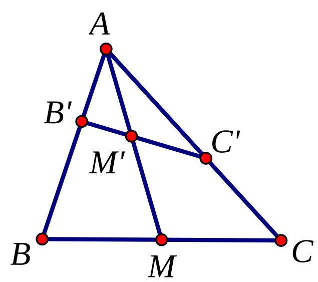
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB'}) = k(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = (1-k)\overrightarrow{AB'} + k\overrightarrow{AC'}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{z}\overrightarrow{AM} = \dfrac{1-k}{x}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{y}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1-k}{x}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{y}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2z} = \dfrac{1-k}{x} = \dfrac{k}{y} = \dfrac{1}{x+y} \Rightarrow x + y = 2z$



Hình 1.39

Hay $\dfrac{AB}{AB'} + \dfrac{AC}{AC'} = 2\dfrac{AM}{AM'}$ đpcm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.122. Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC ta lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{5};\ \frac{BN}{NC}=\frac{1}{3}$. Gọi I là giao điểm của AN và CM

Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$

Bài 1.123: Cho tam giác ABC và trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM, AC và BC lần lượt tại D, E và F. Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho FG song song AC.

Tính $\frac{ED}{GB}$

Bài 1.124: Cho ΔABC có $AB=3,\ AC=4$. Phân giác trong AD của góc BAC cắt trung tuyến BM tại I. Tính $\frac{AD}{AI}$

Bài 1.125: Cho tam giác ABC, trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho: $AM=3MC$, $NC=2NB$, gọi O là giao điểm của AN và BM. Tính diện tích ΔABC biết diện tích ΔOBN bằng 1.

Bài 1.126: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là nằm trên cạnh AB, CD sao cho $AB=3AM,\ CD=2CN$, G là trọng tâm tam giác MNB và AG cắt BC tại I. Tính $\frac{BI}{BC}$

Bài 1.127: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N. Biết $OA=1, OB=2,\ OC=3,\ OD=4$, tính $\frac{CN}{ND}$.

Bài 1.128. Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC}=3S_{AMC}$. Một đường thẳng cắt các cạnh AB, AM, AC lần lượt tại B', M', C' phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{AB}{AB'}+2\frac{AC}{AC'}=3\frac{AM}{AM'}$$

Bài 1.129: Trong đường tròn (O) với hai dây cung AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K. Chứng minh rằng $\frac{AM^2}{CM^2}=\frac{AK}{CK}$