CHUYÊN ĐỀ II: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Tích vô hướng có rất nhiều ứng dụng trong giải toán. Sau đây chúng ta tiếp cận những ứng dụng của nó trong giải các bài toán hình học.

I. CHỨNG MINH TÍNH VUÔNG GÓC VÀ THIẾT LẬP ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng điều kiện $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

Chú ý: Ta có $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, để chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ thông thường chúng ta phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ qua hai vectơ không cùng phương.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

Lời giải

Ta có $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$

$= \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 + CD^2 - BC^2 - \left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}\right)^2$

$= -2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right)$

$= 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$

Do đó đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi

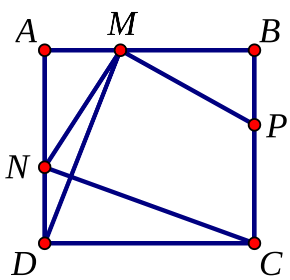
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

Ví dụ 2 Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N thuộc cạnh AB và AD sao cho $AM = DN = x$.

a) Chứng minh rằng CN vuông góc với DM.

b) Giả sử P là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{BP} = y\overrightarrow{BC}$ tìm hệ thức liên hệ của x, y và a để MN vuông góc với MP.

Lời giải (hình 2.11)



Hình 2.11

a) Ta có $\overrightarrow{DN} = -\frac{x}{a}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{x}{a}\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{AB} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AD}$

và $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = \left(\frac{x}{a}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)\left(-\overrightarrow{AB} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AD}\right)$

$= -\frac{x}{a}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{x}{a}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{x^2}{a^2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

Vì $ABCD$ hình vuông nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$

Do đó $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = -ax + ax = 0$

Vậy CN vuông góc với DM.

b) Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \dfrac{a-x}{a}\overrightarrow{AB} - \dfrac{x}{a}\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = \dfrac{a-x}{a}\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$

Suy ra $MN \perp MP \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a-x}{a}\overrightarrow{AB} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{a-x}{a}\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-x)^2}{a^2}.\overrightarrow{AB}^2 - \frac{x}{a}.y.\overrightarrow{AD}^2 = 0 \Leftrightarrow (a-x)^2 = axy$$

Ví dụ 3: Cho tam giác đều ABC. Lấy các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. Chứng minh rằng $BI \perp IC$.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AM}$. Ta có

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = k\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) - \overrightarrow{AC} = k\left(\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{AC}$ Hay

$$\overrightarrow{CI} = k\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) - \overrightarrow{AC} = \frac{2k}{3}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{k}{3} - 1\right)\overrightarrow{AC}$$

Mặt khác $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Vì $\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CN}$ cùng phương nên $2k = 1 - \dfrac{k}{3} \Rightarrow k = \dfrac{3}{7}$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) = \frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$$

Suy ra $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} - \left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{7}\overrightarrow{AC}$$

Do đó $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IC} = \left(-\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}\right)\left(-\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{6}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

$$= \frac{1}{49}\left(10\overrightarrow{AB}^2 + 6\overrightarrow{AC}^2 - 32\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$$

Vì tam giác ABC đều nên $AB = AC, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos A = \dfrac{1}{2}AB^2$

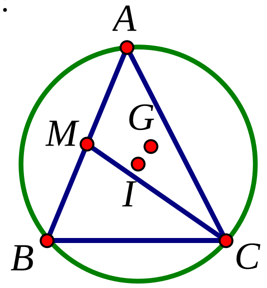
Suy ra $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IC} = 0$

Vậy $BI \perp IC$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ACM, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng GI vuông góc với CM

Lời giải (2.12)

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}; \overrightarrow{AC} = \vec{y}$ và : $AB = AC = a$. Ta có :



Hình 2.12

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}.\vec{x} - \vec{y} \quad (1)$$

Gọi J là trung điểm CM, ta có :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}$$

Mặt khác

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB})^2 \\ IA^2 = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI}.\vec{x} = \dfrac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{AI}.\vec{y} = \dfrac{a^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{CM}.\ \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}\right)\left(\overrightarrow{AI} - \frac{1}{6}.\vec{x} - \frac{1}{3}.\vec{y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{x}.\overrightarrow{AI} - \vec{y}.\overrightarrow{AI} - \frac{1}{12}.x^2 + \frac{1}{6}.\vec{x}.\vec{y} - \frac{1}{6}\vec{x}.\vec{y} + \frac{1}{3}.y^2 =$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3} = 0.$$

Suy ra GI vuông góc với CM

3. Bài tập luyện tập:

Bài 2.96: Cho 4 điểm A, B, C, D thỏa mãn hệ thức $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$

Bài 2.97 : Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \dfrac{AC}{4}$, N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

Bài 2.98: Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A. Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy các điểm M, N, E sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CE}{EA}$.

Chứng minh rằng $AN \perp ME$.

Bài 2.99: Cho tam giác đều ABC, độ dài cạnh là 3a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tính x để AM vuông góc với PN.

Bài 2.100: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Chứng minh rằng $BMN = 90^0$

Bài 2.101: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$. I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng $AI \perp BD$.

Bài 2.102: Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Và I, J lần lượt là trung điểm AD và BC. Chứng minh rằng HK vuông góc với IJ**.**

Bài 2.103: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC. D là hình chiếu của H lên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với DB

Bài 2.104: Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A', B' và C'. Gọi P là giao điểm của BC với B'C'. Chứng minh rằng IP vuông góc AA'.

Bài 2.105: Cho tam giác ABC có $AB = 4,\ AC = 8$ và $A = 60^0$. Lấy điểm E trên tia AC và đặt $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để BE vuông góc với trung tuyến AF của tam giác ABC.

Bài 2.106: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và G là trọng tâm , I là tâm đường tròn nội tiếp. Tìm điều kiện của $a,\ b,\ c$ để IG vuông góc với IC.

Bài 2.107 : Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M, P là trung điểm của đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng : $MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$

Bài 2.108: Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Qua A vẽ các đường thẳng song song với BE, CF lần lượt cắt các đường thẳng CF, BE tại P và Q. Chứng minh rằng PQ vuông góc với trung tyến AM của ABC.

III. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ BIỂU THỨC HÌNH HỌC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các bất đẳng thức

- Cho $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì. Khi đó ta có

+ $\vec{a}.\vec{b} \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$ hay $\vec{a}; \vec{b}$ cùng hướng.

+ $\vec{a}.\vec{b} \ge -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1$ hay $\vec{a}; \vec{b}$ ngược hướng.

- $\vec{u}^2 \ge 0$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} = \vec{0}$
- Bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Bunhiacopxki...)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là một điểm bất kỳ. Chứng minh rằng

$MA^2 + MB^2 + MC^2 \ge MA.GA + MB.GB + MC.GC \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MG} = MA.MG.\cos\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MG}\right) \le MA.MG$

Tương tự $MB.GB \ge \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB}$; $MC.GC \ge \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}$

Suy ra $MA.GA + MB.GB + MC.GC \ge \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}$

Mặt khác

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right).\overrightarrow{GB}+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right).\overrightarrow{GC}$

$=\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2=GA^2+GB^2+GC^2$

Suy ra $MA.GA+MB.GB+MC.GC\ge GA^2+GB^2+GC^2$ (*)

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$MA^2+MB^2+MC^2+GA^2+GB^2+GC^2\ge 2MA.GA+2MB.GB+2MC.GC$

Kết hợp (*) suy ra

$MA^2+MB^2+MC^2+GA^2+GB^2+GC^2\ge MA.GA+MB.GB+MC.GC+GA^2+GB^2+GC^2$ hay

$MA^2+MB^2+MC^2\ge MA.GA+MB.GB+MC.GC$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét:

- Ta có $GA=\frac{2}{3}m_a,\ GB=\frac{2}{3}m_b,\ GC=\frac{2}{3}m_c$

$\Rightarrow GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Suy ra với mọi điểm M thì

$m_a.MA+m_b.MB+m_c.MC\ge \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)\ge a^2+b^2+c^2$

$3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)\ge 2\left(m_a.MA+m_b.MB+m_c.MC\right)$

Đặc biệt

- Với $M\equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta có

$OA^2+OB^2+OC^2\ge OA.GA+OB.GB+OC.GC\ge GA^2+GB^2+GC^2$

Mặt khác ta có $OA=OB=OC=R$, ta có

$R\left(GA+GB+GC\right)\le 3R^2$ hay $m_a+m_b+m_c\le \frac{9}{2}R$ suy ra $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\ge \frac{2}{R}$

$R\left(GA+GB+GC\right)\ge GA^2+GB^2+GC^2$ hay $\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{m_a+m_b+m_c}\le \frac{3R}{2}$

$3R^2\ge GA^2+GB^2+GC^2$ hay $m_a^2+m_b^2+m_c^2\le \frac{27}{4}R^2$, $9R^2\ge a^2+b^2+c^2$

- Với $M\equiv I$ tâm đường tròn nội tiếp tam giác, ta có

  $IA.GA+IB.GB+IC.GC\ge GA^2+GB^2+GC^2$

Mặt khác $IA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},\ IB=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}},\ IC=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$ do đó ta có

$\frac{m_a}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{m_b}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{m_c}{\sin\frac{C}{2}}\ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2r}$

- Với $M\equiv H$ ta được $3\left(HA^2+HB^2+HC^2\right)\ge a^2+b^2+c^2$.

Xét tam giác ABC nhọn khi đó ta có

$$HC = \frac{CA'}{\sin CHA'} = \frac{CA'}{\sin B} = \frac{AC.\cos C}{\sin B} = 2R\cos C.$$

Tương tự ta cũng có: HB = 2RcosB, HC = 2RcosC

Do đó $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \left(\frac{p}{3R}\right)^2$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ. Chứng minh rằng

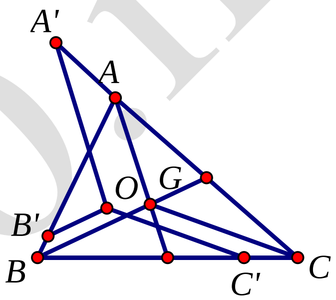
$$\cos\frac{A}{2}.MA + \cos\frac{B}{2}.MB + \cos\frac{C}{2}.MC \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải (2.13)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Ta có $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}\overrightarrow{IA} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}\overrightarrow{IB} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Vì $\cos\frac{A}{2}.MA = \frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.MA.IA \geq \frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}$, tương tự ta có



Hình 2.13

$\cos\frac{B}{2}.MB \geq \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{IB}$ và

$\cos\frac{C}{2}.MC \geq \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{IC}$

Mà $\frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{IB} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{IC}$

$$= \overrightarrow{MI}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}\overrightarrow{IA} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}\overrightarrow{IB} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}\overrightarrow{IC}\right) + \cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC$$

$$= \cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC = AE + BF + CD = \frac{a+b+c}{2}$$

Do đó $\cos\frac{A}{2}.MA + \cos\frac{B}{2}.MB + \cos\frac{C}{2}.MC \geq \frac{a+b+c}{2}$

Tổng quát

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) ngoại tiếp đường tròn tâm J. Chứng minh rằng với điểm M bất kỳ thì $\sum_{i=1}^{n} \cos\frac{A_i}{2}.\ MA_i - JA_i \ \geq 0$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với G là trọng tâm. Qua điểm O bất kỳ nằm trong tam giác kẻ đường thẳng song song với GA, GB, GC tương ứng cắt CA, AB, BC tại các điểm A', B', C'. Xác định vị trí điểm M để $m_a MA' + m_b MB' + m_c MC'$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Ta có $m_a.MA' = \frac{3}{2}GA.MA' \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}.\ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}$

Tương tự $m_b.MB' \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{GB}.\ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB'}$, $m_c.MC' \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{GC}.\ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC'}$

Suy ra $m_a.MA'+m_b.MB'+m_c.MC'\geq\frac{3}{2}\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\ \ +\frac{3}{2}\ \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{OC'}$

Hay $m_a.MA'+m_b.MB'+m_c.MC'\geq m_aOA'+m_bOB'+m_cOC'$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với O.

Vậy với M trùng với O thì $m_aMA'+m_bMB'+m_cMC'$ đạt giá trị chỏ nhất.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC và và ba số thực $x,\ y,\ z$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2\geq 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$

Lời giải

Gọi $I;r$ là đường tròn nội tiếp Δ ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

Khi đó $x.\overrightarrow{IM}+y.\overrightarrow{IN}+z.\overrightarrow{IP}\ ^2\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2.IM^2+y^2.IN^2+z^2.IP^2+2xy\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}+2yz\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP}+2zx\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IM}\geq 0$

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2\ \ r^2+2r^2\ \ xy\cos\ 180^0-C\ \ +yz\cos\ 180^0-A\ \ +zx\cos\ 180^0-B\ \ \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$ đpcm.

Nhận xét:

\+ Khi chọn $x=y=z=1$ ta có: $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$.

\+ Khi chọn $y=z=1$ ta có $\cos A+x\ \ \cos B+\cos C\ \ \leq 1+\frac{1}{2}x^2$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.109: Cho tam giác ABC và ba số thực $x,\ y,\ z$. Chứng minh rằng:

$$yz\cos 2A+zx\cos 2B+xy\cos 2C\leq-\frac{1}{2}\ \ x^2+y^2+z^2$$

Bài 2.110: Cho tam giác ABC không đều nội tiếp đường tròn (O). Tìm trên đường tròn điểm M để có tổng bình phương khoảng cách từ đó đến ba đỉnh tam giác là nhỏ nhất, lớn nhất.

Bài 2.111: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi là góc α giữa hai trung tuyến BD và CK. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos\alpha$

Bài 2.112: Cho M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{MA}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}$

Bài 2.113: Cho tam giác ABC ABC. Tìm điểm M sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$T=2.\cos\frac{A}{2}.MA+MB+MC$

Bài 2.114: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $am_a^2+bm_b^2+cm_c^2\geq\frac{9}{4}abc$

b) $am_bm_c + bm_cm_a + cm_am_b \ge \frac{9}{4}abc$

c) $\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \ge \frac{9}{4}.\frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca}$

Bài 2.115: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$ b) $R \ge 2r$

c) $R^2 + a^2 + b^2 \ge c^2$ d) $4S \le (ab+bc+ca)\sqrt{\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}}$

e) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \le 8R(R-2r)$

Bài 2.116: Cho tam giác ABC, O là điểm bất kỳ trong tam giác. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB, BC, CA cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $cMA' + aMB' + bMC' \ge cOA' + aOB' + bOC'$

Bài 2.117: Cho tam giác ABC nhọn. Tìm điểm M sao cho $MA + 2MB + \sqrt{3}MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2.118: Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \ge 3$), $\vec{e_i}$, $i = \overline{1,n}$, O là điểm bất kỳ nằm trong đa giác.Gọi B_i là hình chiếu điểm O lên A_iA_{i+1}. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có

$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}(MB_i - OB_i) \ge 0$

Bài 2.119: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Tìm điểm M sao cho tổng $MA_1 + MA_2 + ... + MA_n$ nhỏ nhất.

Bài 2.120: Cho tam giác ABC; O là điểm trong tam giác, đặt

$\widehat{BOC} = \alpha, \widehat{COA} = \beta, \widehat{AOB} = \gamma$. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có

$MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma \ge OA\sin\alpha + OB\sin\beta + OC\sin\gamma$

Bài 2.121: Cho tam giác ABC, tìm vị trí điểm M để $P = a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.Biết:

a) M là điểm bất kì

a) M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

c) M nằm trên đường thẳng d bất kỳ

Bài 2.122: Cho n điểm $A_1A_2...A_n$, và n số dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ .O là điểm thoả mãn

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có bất đẳng thức

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 \ge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \ge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2$

Bài 2.123: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Xác định điểm M sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất.

a) $\sqrt{2}MA + MB + MC$ b) $2\sqrt{2}MA + \sqrt{10}(MB + MC)$

Bài 2.124: Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC ta luôn có

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge 6\cos A.\cos B.\cos C$

Bài 2.125: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$ b) $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin A.\sin B.\sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ d) $\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2} \le \dfrac{9}{4}$

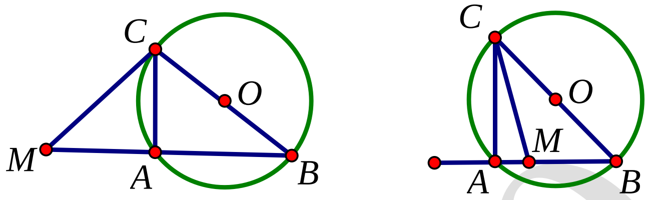
e) $\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

IV. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM TỚI ĐƯỜNG TRÒN VÀ ỨNG DỤNG.

1. Phương pháp giải.

a) Bài toán: Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.

Chứng minh: Vẽ đường kính BC của đường tròn (O;R). Ta có $\overrightarrow{MA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{MC}$ lên đường thẳng MB. Theo công thức hình chiếu ta có



Hình 2.14

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC} \;.\; \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$$

$$= \overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OB} \;.\; \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB} = MO^2 - OB^2 = MO^2 - R^2.$$

Từ bài toán trên ta có định nghĩa sau:

b) Định nghĩa: Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định.

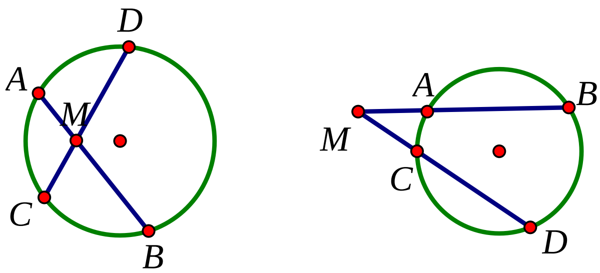
Một đường thẳng thay đổi đi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Khi đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$ là đại lượng không đổi được gọi là *phương tích* của điểm M đối với đường tròn (O;R), kí hiệu là $P_{M/O}$

Chú ý: Nếu M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT. Khi đó

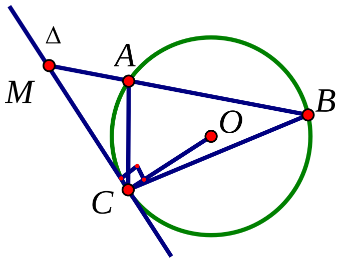
$$P_{M/O} = MT^2 = MO^2 - R^2$$

c) Các tính chất:

- Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M. Điều kiện cần và đủ để bốn điểm A, B, C, D nội tiếp được đường tròn là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ (hay $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$).
- Cho đường thẳng AB cắt đường thẳng Δ ở M và điểm C trên đường thẳng Δ $C \neq M$. Điều kiện cần và đủ để Δ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C là $MA.MB = MC^2$.



Hình 2.15

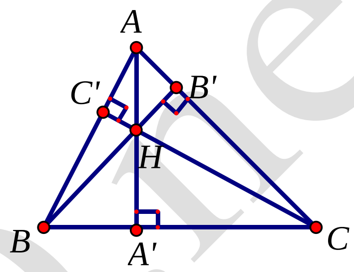


Hình 2.16

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$

Lời giải(hình 2.17)



Hình 2.17

Ta có $\widehat{BB'C} = \widehat{BC'C} = 90^0$ suy ra tứ giác $BCB'C'$ nội tiếp trong đường tròn (C) đường kính BC. Do đó $HB.HB' = HC.HC'$ (vì cùng bằng phương tích từ điểm H tới đường tròn (C)) (1)

Tương tự tứ giác $ACA'C'$ nội tiếp được nên $HA.HA' = HC.HC'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$.

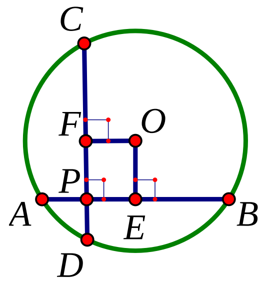
Ví dụ 2: Cho đường tròn (O;R) và một điểm P cố định ở bên trong đường tròn đó. Hai dây cung thay đổi AB và CD luôn đi qua điểm P và vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vị trí điểm P.

Lời giải(hình 2.18)

a) Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD suy ra $OE \perp AB$ và $OF \perp CD$



Hình 2.18

Ta có $AB^2 + CD^2 = (2AE)^2 + (2CF)^2$

$= 4(AO^2 - OE^2) + 4(CO^2 - OF^2)$

$= 4(2R^2 - (OE^2 + OF^2)) = 4(2R^2 - OP^2)$

Suy ra $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b)

$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 - 2PA.PB - 2PC.PD$

$= AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$

Mặt khác theo câu a) ta có $AB^2 + CD^2 = 4(2R^2 - OP^2)$ và

$P_{P(O)} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD} = PO^2 - R^2$

Suy ra $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4(2R^2 - OP^2) + 4(PO^2 - R^2) = 4R^2$

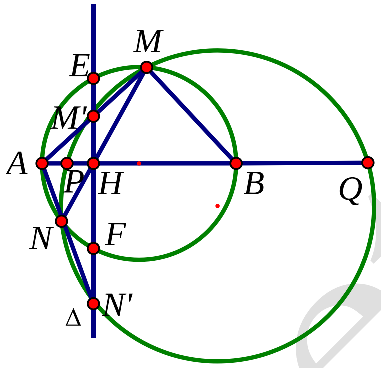
Vậy $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vị trí điểm P.

Ví dụ 3: Cho đường tròn đường kính AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB ở H $(H \neq A, H \neq B)$. Một đường thẳng quay quanh H cắt đường tròn ở M, N và các đường thẳng AM, AN lần lượt cắt Δ ở M', N'.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M', N' thuộc một đường tròn (C) nào đó.
b) Chứng minh rằng các đường tròn (C) luôn đi qua hai điểm cố định

Lời giải(hình 2.19)

a) Vì $M'HB = M'MB = 90^0$ nên tứ giác $BHM'M$ nội tiếp được suy ra
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AM}$ (1).



Hình 2.19

Tương tự Vì $N'HB = N'NB = 90^0$ nên tứ giác $HBN'N$ nội tiếp được suy ra
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN'}.\overrightarrow{AN}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN'}.\overrightarrow{AN}$
Suy ra bốn điểm M, N, M', N' thuộc một đường tròn.
b) Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của đường tròn (C) với đường thẳng AB và E, F lần lượt là giao điểm của Δ với đường tròn đường kính AB.
Khi đó ta có $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$
Mặt khác

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right) = AE^2 \text{ và}$$

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH}\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}.\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}\right) = AF^2$$

Suy ra $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = AE^2 = AF^2$
Do đó P, Q thuộc đường tròn (S) tiếp xúc với AE, AF ở E, F.
Vì (S) là đường tròn cố định nên P, Q cố định thuộc đường tròn (C).

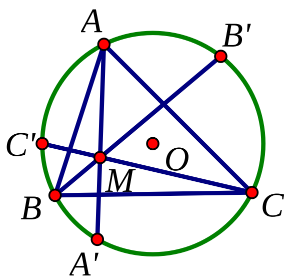
Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Giả sử M là điểm di động trong đường tròn (O). Nối AM, BM, CM lần lượt cắt (O) tại A', B', C'. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3$.

Lời giải(hình 2.20)

Ta có ĐT $\Leftrightarrow \frac{MA^2}{MA'.MA} + \frac{MB^2}{MB'.MB} + \frac{MC^2}{MC'.MC} = 3$

$\Leftrightarrow -\frac{MA^2}{\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MA}} - \frac{MB^2}{\overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB}} - \frac{MC^2}{\overrightarrow{MC'}.\overrightarrow{MC}} = 3$ (*)

Mặt khác



Hình 2.20

$P_{M/(O)} = \overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC'}.\overrightarrow{MC} = MO^2 - R^2$ Suy ra

(*) $\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = -3\left(MO^2 - R^2\right)$ (1)

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm GO. Ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = -3\left(MO^2 - R^2\right)$

$\Leftrightarrow MG^2 + MO^2 = R^2 - \frac{1}{3}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO}\right)^2 = R^2 - \frac{1}{3}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IO^2 = R^2 - \frac{1}{3}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$

$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) - IO^2$

$\Leftrightarrow MI = k$

Trong đó $k^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) - IO^2$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = k$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.126: Trong đường tròn tâm (O;R) cho hai dây cung AA' và BB' vuông góc với nhau tại S. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $SM \perp A'B'$.

Bài 2.127: Cho hai đường tròn (O) và (O'); AA', BB' là các tiếp tuyến chung ngoài của chúng. đường thẳng AB' theo thứ tự cắt (O) và (O') tại M, N. Chứng minh rằng $AM = B'N$.

Bài 2.128: Cho tam giác ABC không cân tại A; AM, AD lần lượt là trung tuyến, phân giác của tam giác. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng $BE = CF$

Bài 2.129: Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định. Một đường thẳng quay quanh A, cắt (O) tại M và N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 2.130: Cho đường tròn (O;R) và điểm P cố định nằm trong đường tròn. Giả sử AB là dây cung thay đổi luôn đi qua P. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, B cắt nhau tại C. Tìm tập hợp điểm C.

Bài 2.131: Cho đường tròn (O) đường kính AB, và điểm H cố định thuộc AB. Từ điểm K thay đổi trên tiếp tuyến tại B của (O), vẽ đường tròn (K; KH) cắt (O) tại C và D. Chứng minh rằng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2.132: Cho đường tròn đường kính AB, H là điểm nằm giữa AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB tại H. Gọi E, F là giao điểm của đường tròn và Δ. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AE và đường tròn (C) bất kì qua H, B. Giả sử hai đường tròn đó cắt nhau tại M và N, chứng minh rằng AM và AN là hai tiếp tuyến của (C).

Bài 2.133: Cho hai đường tròn đồng tâm O là (C_1) và (C_2) ((C_2) nằm trong (C_1)). Từ một điểm A nằm trên (C_1) kẻ tiếp tuyến AB tới (C_2). AB giao (C_1) lần thứ hai tại C. D là trung điểm của AB. Một đường thẳng qua A cắt (C_2) tại E, F sao cho đường trung trực của đoạn DF và EC giao nhau tại điểm M nằm trên AC. Tính $\frac{AM}{MC}$?

Bài 2.134: Cho đường tròn (O;R) và hai điểm P, Q cố định (P nằm ngoài (O), Q nằm trong (O)). Dây cung AB của (O) luôn đi qua Q. PA, PB lần lượt là giao (O) lần thứ hai tại D, C. Chứng minh rằng CD luôn đi qua điểm cố định.

Bài 2.135: Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$. Tìm tập hợp các điểm M có phương tích đối với hai đường tròn bằng nhau.