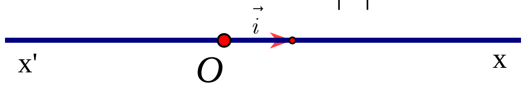
§4 TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT :

I.TRỤC TỌA ĐỘ:

1. Định nghĩa: Trục tọa độ (Trục , hay trục số) là một đường thẳng trên đó ta đã xác định một điểm O và một vectơ đơn vị $\vec{i}$ (tức là $\left|\vec{i}\right| = 1$)



Hình 1.30

Điểm O được gọi là *gốc tọa độ* , vec tơ $\vec{i}$ được gọi là *vectơ đơn vị* của trục tọa độ. Kí hiệu (O ; $\vec{i}$) hay $x'Ox$ hoặc đơn giản là Ox

2. Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục:

+ Cho vec tơ $\vec{u}$ nằm trên trục (O ; $\vec{i}$) thì có số thực a sao cho $\vec{u} = a\vec{i}$ với $a \in R$. Số a như thế được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ đối với trục (O ; $\vec{i}$)

+ Cho điểm M nằm trên (O ; $\vec{i}$) thì có số m sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$. Số m như thế được gọi là tọa độ của điểm M đối với trục (O ; $\vec{i}$)

Như vậy tọa độ điểm M là trọa độ vectơ $\overrightarrow{OM}$

3. Độ dài đại số của vec tơ trên trục :

Cho hai điểm A, B nằm trên trục Ox thì tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ kí hiệu là $\overline{AB}$ và gọi là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục Ox

Như vậy $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}$

Tính chất :

+ $\overline{AB} = -\overline{BA}$

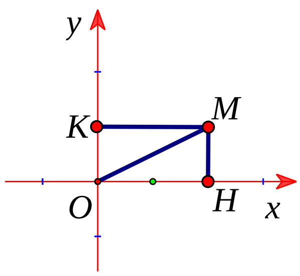
+ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

+ $\forall A;B;C \in (O;\vec{i}) : \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1. Định nghĩa: Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$. Điểm O gọi là *gốc tọa độ*, Ox gọi là *trục hoành* và Oy gọi là *trục tung*.

Kí hiệu Oxy hay $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$



Hình 1.31

2. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ .

+ Trong hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ nếu $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $\left(x;y\right)$ được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$, kí hiệu là $\vec{u} = \left(x;y\right)$ hay $\vec{u}\left(x;y\right)$.

x được gọi là hoành độ, y được gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$

+ Trong hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M, kí hiệu là $M = \left(x;y\right)$ hay $M\left(x;y\right)$. x được gọi là hoành độ, y được gọi là tung độ của điểm M.

Nhận xét: (hình 1.31) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy thì

$M\ \ x;y\ \ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$

Như vậy $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}, \overrightarrow{OK} = y\vec{j}$ hay $x = \overline{OH}, y = \overline{OK}$

3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác.

+ Cho $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và M là trung điểm AB. Tọa độ trung điểm $M\ \ x_M;y_M$ của đoạn thẳng AB là $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

+ Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C\ \ x_C;y_C$. Tọa độ trọng tâm $G\ \ x_G;y_G$ của tam giác ABC là $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ và $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{2}$

4. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ.

Cho $\vec{u} = (x;y)$; $\vec{u'} = (x';y')$ và số thực k. Khi đó ta có :

1) $\vec{u} = \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

2) $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x';y \pm y')$

3) $k.\vec{u} = (kx;ky)$

4) $\vec{u'}$ cùng phương $\vec{u}\,(\vec{u} \neq \vec{0})$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

5) Cho $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = \ \ x_B - x_A;y_B - y_A$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1: Tìm tọa độ của một điểm; tọa độ vectơ; độ dài đại số của vectơ và chứng minh hệ thức liên quan trên trục (O ; $\vec{i}$)

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các kiến thức cơ bản sau:

- Điểm M có tọa độ $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a.\vec{i}$
- Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{i}$
- Nếu a, b lần lượt là tọa độ của A, B thì $\overline{AB} = b - a$
- Các tính chất

  \+ $\overline{AB} = -\overline{BA}$

  \+ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

  \+ $\forall A;B;C \in (O;\vec{i}) : \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Trên trục tọa độ (O ; $\vec{i}$) cho 3 điểm A ; B ; C có tọa độ lần lượt là –2 ; 1 và 4.

a) Tính tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$

b) Chứng minh B là trung điểm của AC.

Lời giải

a) Ta có $\overline{AB} = 1 + 2 = 3$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CA} = -6$

b) Ta có $\overline{BA} = -3 = -\overline{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC}$ suy ra B là trung điểm AC

Ví dụ 2: Trên trục tọa độ (O; $\vec{i}$) cho 4 điểm A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh

$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

Lời giải

Cách 1: Giả sử tọa độ các điểm A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d.

Ta có $\overline{AB}.\overline{CD} = (b-a)(d-c) = bd + ac - bc - ad$

$\overline{AC}.\overline{DB} = (c-a)(b-d) = bc + ad - cd - ab$

$\overline{AD}.\overline{BC} = (d-a)(c-b) = cd + ab - ac - bd$

Cộng vế với vế lại ta được $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

Cách 2: $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} =$

$\overline{AB}.(\overline{AD} - \overline{AC}) + \overline{AC}.(\overline{AB} - \overline{AD}) + \overline{AD}.(\overline{AC} - \overline{AB})$

$= \overline{AB}.\overline{AD} - \overline{AB}.\overline{AC} + .\overline{AC}.\overline{AB} - \overline{AC}.\overline{AD} + \overline{AD}.\overline{AC} - \overline{AD}.\overline{AB}$

$= 0$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.80. Trên trục tọa độ (O; $\vec{i}$) Cho 2 điểm A và B có tọa độ lần lượt a và b .

a)Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \neq 1)$

b)Tìm tọa độ trung điểm I của AB

c)Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overline{NA} = -5\overline{NB}$

Bài 1.81.Trên trục (O ; $\vec{i}$) cho 3 điểm A ; B ; C có tọa độ lần lượt là a ; b ; c . Tìm điểm I sao cho : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Bài 1.82. Trên trục tọa độ (O ; $\vec{i}$) cho 4 điểm A, B, C, D có tọa độ lần lượt là a, b, c, d và thỏa mãn hệ thức $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$. Chứng minh rằng $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

DẠNG 2: Tìm tọa độ điểm, tọa độ vectơ trên mặt phẳng Oxy .

1. Phương pháp.

- Để tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$ ta làm như sau

Dựng vectơ $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên Ox, Oy . Khi đó $\vec{a}(a_1; a_2)$ với $a_1 = \overline{OH}$, $a_2 = \overline{OK}$

- Để tìm tọa độ điểm A ta đi tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}$
- Nếu biết tọa độ hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ suy ra tọa độ $\overrightarrow{AB}$ được xác định theo công

thức $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

Chú ý: $\overline{OH} = OH$ nếu H nằm trên tia Ox (hoặc Oy) và $\overline{OH} = -OH$ nếu H nằm trên tia đối tia Ox (hoặc Oy)

2. Các ví dụ:

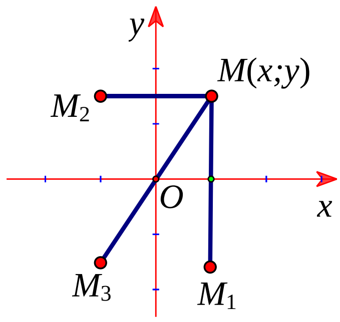
Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho điểm $M\ \ x;y$.

Tìm tọa độ của các điểm

a) M_1 đối xứng với M qua trục hoành

b) M_2 đối xứng với M qua trục tung

c) M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ



Hình 1.32

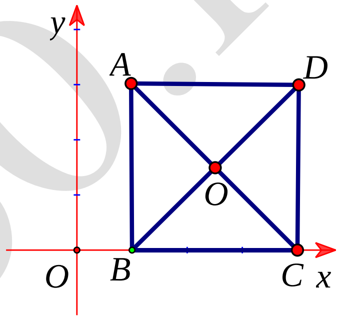
Lời giải (hình 1.32)

a) M_1 đối xứng với M qua trục hoành suy ra $M_1\ \ x;-y$

b) M_2 đối xứng với M qua trục tung suy ra $M_2\ \ -x;y$

c) M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra $M_3\ \ -x;-y$

Ví dụ 2: Trong hệ trục tọa độ (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1;3)$. Biết điểm B thuộc trục (O; $\vec{i}$) và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AC}$



Hình 1.33

Lời giải (hình 1.33)

Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ (hình bên)

Vì điểm $A(1;3)$ suy ra $AB = 3, OB = 1$

Do đó $B\ \ 1;0$, $C\ \ 4;0$, $D\ \ 4;3$

Vậy $\overrightarrow{AB}\ \ 0;-3$, $\overrightarrow{BC}\ \ 3;0$ và $\overrightarrow{AC}\ \ 3;-3$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $BAD = 60^0$. Biết A trùng với gốc tọa độ O, C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$.

Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$

Lời giải (hình 1.34)

Từ giả thiết ta xác định được hình thoi trên mặt phẳng tọa độ Oxy

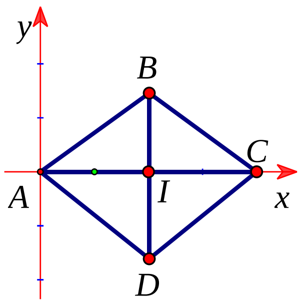
Gọi I là tâm hình thoi ta có

$$BI = AB\sin BAI = a\sin 30^0 = \frac{a}{2}$$

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra

$$A\ \ 0;0\ , B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right), C\ \ a\sqrt{3};0\ , D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2}\right)$$



Hình 1.34

3. Bài tập luyên tập.

Bài 1.83: Trong hệ trục tọa độ (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), Cho tam giác đều ABC cạnh a, biết O là trung điểm BC, $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}$ cùng hướng $\overrightarrow{OA}$.

a) Tính tọa độ của các đỉnh của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ trung điểm E của AC

c) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Bài 1.84: Trong hệ trục tọa độ (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 8$, $BD = 6$. Biết $\overrightarrow{OC}$ và $\vec{i}$ cùng hướng, $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{j}$ cùng hướng.

a) Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi

b) Tìm tọa độ trung điểm I của BC và trọng tâm tam giác ABC

Bài 1.85: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 4$ và chiều cao ứng với cạnh AD = 3, $BAD = 60^0$. Chọn hệ trục tọa độ $A;\vec{i},\vec{j}$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng, $y_B > 0$. Tìm tọa độ các vecto $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}$

Bài 1.86: Cho lục giác đều $ABCDEF$. Chọn hệ trục tọa độ (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), trong đó O là tâm lục giác đều , $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OD}$, $\vec{j}$ cùng hướng $\overrightarrow{EC}$. Tính tọa độ các đỉnh lục giác đều , biết cạnh của lục giác là 6 .

DẠNG 3: Xác định tọa độ điểm, vectơ liên quan đến biểu thức dạng $\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-\vec{v},\ k\vec{u}$

1. Phương pháp.

Dùng công thức tính tọa độ của vectơ $\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-\vec{v},\ k\vec{u}$

Với $\vec{u} = (x;y)$; $\vec{u'} = (x';y')$ và số thực k, khi đó $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x';y \pm y')$ và $k.\vec{u} = (kx;ky)$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy , cho 3 vecto: $\vec{a} = (3;2)$ $\vec{b} = (-1;5)$ $\vec{c} = (-2;-5)$

Tìm tọa độ của vectơ sau

a) $\vec{u}+2\vec{v}$ với $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$ và $\vec{v}=\pi\vec{i}$

b) $\vec{k} = 2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{l} = -\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có $\vec{u}+2\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}+\pi\vec{i}=(3+\pi)\vec{i}-4\vec{j}$ suy ra $\vec{u}+2\vec{v}=(3+\pi;-4)$

b) Ta có $2\vec{a} = (6;4)$ $\vec{b} = (-1;5)$ suy ra $\vec{k} = (6-1;4+5) = (5;9)$;

$-\vec{a} = (-3;-2)$, $2\vec{b} = (-2;10)$ và $5\vec{c} = (-10;-25)$ suy ra

$\vec{l} = (-3-2-10;-2+10-25) = (-15;-17)$

Ví dụ 2: Cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;4)$; $\vec{c} = (-1;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}$ biết

a) $2\vec{u}-3\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

b) $3\vec{u}+2\vec{a}+3\vec{b}=3\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có $2\vec{u}-3\vec{a}+\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

Suy ra $\vec{u}=\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2};3-2\right)=(3;1)$

b) Ta có $3\vec{u}+2\vec{a}+3\vec{b}=3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{u}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

Suy ra $\vec{u}=\left(-\frac{2}{3}+3-1;-\frac{4}{3}-4+3\right)=\left(\frac{4}{3};-\frac{7}{3}\right)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A\ \ -4;0\ \ ,B\ \ 0;3$ và $C\ \ 2;1$

a) Xác định tọa độ vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}\ \ 4;3\ \ ,\overrightarrow{AC}\ \ 6;1$ suy ra $\vec{u}=\ \ 2;5$

b) Gọi $M\ \ x;y$, ta có $\overrightarrow{MA}\ \ -4-x;-y\ \ ,\overrightarrow{MB}\ \ -x;3-y\ \ ,\overrightarrow{MC}\ \ 2-x;1-y$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\ \ -6x+2;-6y+9$

Do đó $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}-6x+2=0\\-6y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Vậy $M\left(\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.87. Cho các vecto $\vec{a}=\ \ 2;0\ \ ,\vec{b}=\left(-1;\frac{1}{2}\right),\vec{c}=\ \ 4;6$.

Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ biết

a) $\vec{u}=2\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c}$

b) $\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{u}=\vec{c}$

Bài 1.88. Cho ba điểm $A\ \ -4;0\ \ ,B\ \ -5;0$ và $C\ \ 3;-3$

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

DẠNG 4: Xác định tọa độ các điểm của một hình

1. Phương pháp.

Dựa vào tính chất của hình và sử dụng công thức

+ M là trung điểm đoạn thẳng AB suy ra $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2},\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$

+ G trọng tâm tam giác ABC suy ra $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3},\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{2}$

+ $\vec{u}\ \ x;y\ \ =\vec{u}'\ \ x';y'\ \ \Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A(2;1),\ B(-1;-2),\ C(-3;2)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M sao cho C là trung điểm của đoạn MB

b) Xác định trọng tâm tam giác ABC

b) Tìm điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Lời giải

a) C là trung điểm của MB suy ra $x_C = \dfrac{x_M + x_B}{2} \Rightarrow x_M = 2x_C - x_B = -5$

và $y_C = \dfrac{y_M + y_B}{2} \Rightarrow y_M = 2y_C - y_B = 6$

Vậy $M\ \ -5;6$

b) G là trọng tâm tam giác suy ra

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2-1-3}{3} = -\dfrac{2}{3}$ và $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{2} = \dfrac{1-2+2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

c) Gọi $D(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-3-x;2-y)$

Ta có: $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x=-3 \\ 2-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow D(0;5).$$

Vậy $D\ \ 0;5$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A\ \ 3;-1\ \ , B\ \ -1;2\ \ $ và $I\ \ 1;-1\ \ $. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên

$x_I = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 3x_I - x_A - x_B = 1$

$y_I = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 3y_I - y_A - y_B = -4$

suy ra $C\ \ 1;-4$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-3=1-x_D \\ 2+1=-4-y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=5 \\ y_D=-7 \end{cases} \Rightarrow D(5;-7)$$

Điểm O của hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm AC do đó

$x_O = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 2,\ y_O = \dfrac{y_A + y_C}{2} = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow O\left(2;-\dfrac{5}{2}\right)$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.89: Cho ba điểm $A(3;4),\ B(2;1),\ C(-1;-2)$

a) Tìm tọa độ trung điểm cạnh BC và tọa độ trọng tâm của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Bài 1.90: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A\ \ 3;4\ \ , B\ \ -1;2\ \ , I\ \ 4;1\ \ $. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và I là trung điểm cạnh CD. Tìm tọa tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Bài 1.91: Cho tam giác ABC có $A\ \ 3;1\ \ , B\ \ 1;-3\ \ $, đỉnh C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ đỉnh C

Bài 1.92: Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Biết $M(1;1), N(-2;-3), P(2;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 1.93: Cho tam giác ABC có $A\left(3;4\right)$, $B\left(-1;2\right)$, $C\left(4;1\right)$. A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A.
a) Tìm tọa độ các điểm A', B', C'
b) Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

DẠNG 5: Bài toán liên quan đến sự cùng phương của hai vectơ. Phân tích một vectơ qua hai vectơ không cùng phương.

1. Phương pháp.

- Cho $\overrightarrow{u} = (x;y)$; $\overrightarrow{u'} = (x';y')$. Vectơ $\overrightarrow{u'}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Chú ý: Nếu $xy \neq 0$ ta có $\overrightarrow{u'}$ cùng phương $\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}$

- Để phân tích $\vec{c}\left(c_1;c_2\right)$ qua hai vectơ $\vec{a}\left(a_1;a_2\right)$, $\vec{b}\left(b_1;b_2\right)$ không cùng phương, ta giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Khi đó ta quy về giải hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;0)$; $\vec{c} = (-1;3)$

a) Chứng minh hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương

b) Phân tích vectơ $\vec{c}$ qua $\vec{a}$; $\vec{b}$

Lời giải

a) Ta có $\dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{0}{2} \Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương

b) Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Ta có $x\vec{a} + y\vec{b} = \left(x - 3y;2x\right)$

Suy ra $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{5}{9}\vec{b}$

Ví dụ 2: Cho $\overrightarrow{u} = \left(m^2 + m - 2;4\right)$ và $\vec{v} = (m;2)$. Tìm m để hai vecto $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

+ Với $m = 0$: Ta có $\overrightarrow{u} = (-2;4)$; $\overrightarrow{v} = (0;2)$

Vì $\dfrac{0}{-2} \neq \dfrac{2}{4}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$ không cùng phương

+ Với $m \neq 0$: Ta có $\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{\mathrm{m}^2 + m - 2}{m} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Vậy với $m = -1$ và $m = 2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.
c) Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$
d) Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}\ -9;3$, $\overrightarrow{AC}\ -5;-5$. Vì $\frac{-9}{-5} \neq \frac{3}{-5}$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

Hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) D trên trục hoành $\Rightarrow D\ x;0$

Ba điểm A, B, D thẳng hàng suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương

Mặt khác $\overrightarrow{AD}\ x-6;-3$ do đó $\frac{x-6}{-9} = \frac{-3}{3} \Rightarrow x = 15$

Vậy $D\ 15;0$

c) Vì E thuộc đoạn BC và $BE = 2EC$ suy ra $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$

Gọi $E\ x;y$ khi đó $\overrightarrow{BE}\ x+3;y-6$, $\overrightarrow{EC}\ 1-x;-2-y$

Do đó $\begin{cases} x+3 = 2\ 1-x \\ y-6 = 2\ -2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Vậy $E\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

d) Gọi $I\ x;y$ là giao điểm của DE và AC.

Do đó $\overrightarrow{DI}\ x-15;y$,$\overrightarrow{DE}\left(-\frac{46}{3};\frac{2}{3}\right)$ cùng phương suy ra

$\frac{3\ x-15}{-46} = \frac{3y}{2} \Rightarrow x + 23y - 15 = 0$ (1)

$\overrightarrow{AI}\ x-6;y-3$, $\overrightarrow{AC}\ -5;-5$ cùng phương suy ra $\frac{x-6}{-5} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow x - y - 3 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = \frac{7}{2}$ và $y = \frac{1}{2}$

Vậy giao điểm hai đường thẳng DE và AC là $I\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A\ 1;-2$, $B\ 0;3$, $C\ -3;4$ và $D\ -1;8$.

a) Bộ ba trong 4 điểm trên bộ nào thẳng hàng

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

c) Phân tích $\overrightarrow{CD}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Bài 1.95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A\ 0;1$, $B\ 1;3$, $C\ 2;7$ và $D\ 0;3$. Tìm giao điểm của 2 đường thẳng AC và BD

Bài 1.96. Cho $\vec{a} = (3;2)$, $\vec{b} = (-3;1)$

a) Chứng minh $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương

b) Đặt $\vec{u} = (2-x)\vec{a} + (3+y)\vec{b}$. Tìm x, y sao cho $\vec{u}$ cùng phương với $x\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

Bài 1.97. Cho tam giác ABC có $A(3;4)$, $B(2;1)$, $C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$

Bài 1.98. Cho ba điểm $A(-1;-1)$, $B(0;1)$, $C(3;0)$

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

b) Xác định tọa độ điểm D biết D thuộc đoạn thẳng BC và $2BD = 5DC$.

c) Xác định tọa độ giao điểm của AD và BG trong đó G là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 1.99. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai điểm A và B là nhỏ nhất, biết:

a) $A\ \ 1;1$ và $B\ \ 2;-4$

b) $A\ \ 1;2$ và $B\ \ 3;4$

Bài 1.100: Cho hình bình hành $ABCD$ có $A\ \ -2;3$ và tâm $I\ \ 1;1$. Biết điểm $K\ \ -1;2$ nằm trên đường thẳng AB và điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ. Tìm các đỉnh còn lại của hình bình hành.