§2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa:

a) Góc giữa hai vectơ.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ điểm O bất kỳ dựng các vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Số đo góc AOB được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

+ Quy ước : Nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=\vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tùy ý (từ 0^0 đến 180^0).

+ Kí hiệu: $\vec{a};\vec{b}$

b) Tích vô hướng của hai vectơ.

Tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi:

$\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

2. Tính chất: Với ba véc tơ bất kì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ và mọi số thực k ta luôn có:

1) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

2) $\vec{a}(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$

3) $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}(k\vec{b})$

4) $\vec{a}^2\geq 0,\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

Chú ý: Ta có kết quả sau:

+ Nếu hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$

+ $\vec{a}.\vec{a}=\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$ gọi là bình phương vô hướng của véc tơ $\vec{a}$.

+ $(\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^2\pm 2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$, $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

3. Công thức hình chiếu và phương tích của một điểm với đường tròn.

a) Công thức hình chiếu.

Cho hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên đường thẳng CD khi đó ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}$

b) phương tích của một điểm với đường tròn.

Cho đường tròn $O;R$ và điểm M. Một đường thẳng qua N cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Biểu thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ được gọi là *phương tích của điểm M đối với đường tròn* $O;R$. Kí hiệu là $P_{M/O}$.

Chú ý: Ta có $P_{M/O}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MO^2-R^2=MT^2$ với T là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ điểm M

3.Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho hai vectơ $\vec{a}=(x_1;y_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó

1) $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

2) $\vec{a}=(x;y)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Hệ quả:

+ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

+ Nếu $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1 : *Xác định biểu thức tích vô hướng, góc giữa hai vectơ.*

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

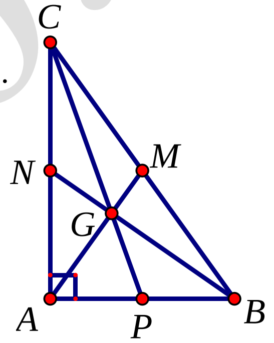
b) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

c) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

Lời giải (hình 2.2)

a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 2a^2\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.



Hình 2.2

Mặt khác $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \cos ABC = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

Nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = a^2$

* Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = -\left|\overrightarrow{CB}\right|.\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos ACB$

Theo định lý Pitago ta có $CA = \sqrt{\left(2a\right)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3}.2a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$

b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -3a^2$. Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)$ Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) = -4a^2$

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{2}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}\ AB^2 + AN^2\ = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}\ AC^2 + AP^2\ = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

Suy ra $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị các biểu thức sau:

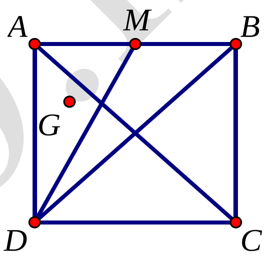
a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG}.\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}$

Lời giải (hình 2.3)

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos ACB$



Hình 2.3

($\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$)

Mặt khác $ACB = 45^0$ và theo định lý Pitago ta có :

$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Suy ra $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a.a\sqrt{2}\cos 45^0 = a^2$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\ = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{CB} - \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\ \right] = -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

Suy ra $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\ - \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\ = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\ + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

Nên $\overrightarrow{CG}.\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}\ = \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

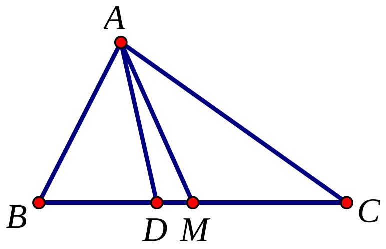
$$= \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải (hình 2.3)



Hình 2.3

a) Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - CB^2\right] = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right)$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos A = cb\cos A$

Suy ra $\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right) = cb\cos A$ hay

$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$

b) * Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\right)$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right)$ nên

$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2.\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right) + b^2\right) = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC}\overrightarrow{DC} = \frac{b}{c}\overrightarrow{DC}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{b}{c}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \left(b + c\right)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \left(b + c\right)^2\overrightarrow{AD}^2 = \left(b\overrightarrow{AB}\right)^2 + 2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \left(c\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(b + c\right)^2\overrightarrow{AD}^2 = b^2c^2 + 2bc.\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right) + c^2b^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{\left(b + c\right)^2}\left(b + c - a\right)\left(b + c + a\right)$

Hay $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{\left(b + c\right)^2}p\left(p - a\right)$

Nhận xét : Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b + c}\sqrt{p\left(p - a\right)}$

3. Bài tập luyện tập:

Bài 2.13. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Bài 2.14 .Cho tam giác ABC có $AB = 5,\ BC = 7,\ AC = 8$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b) Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

Bài 2.15. Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Bài 2.16. Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng 60^0. Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$

Bài 2.17. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN=1$ và P là trung điểm BC. Tính $\cos MNP$.

Bài 2.18. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}$

Bài 2.19. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB=CD=2a,\ MN=a\sqrt{3}$.

Bài 2.20: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB=BC=2\sqrt{5},\ CD=BD=5\sqrt{2}, BD=3\sqrt{10},\ AC=10$. Tìm góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}$.

Bài 2.21: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng AB, M là trung điểm của cạnh CB.

a) Xác định trên đường thẳng AC điểm N sao cho tam giác MDN vuông tại D. Tính diện tích tam giác đó.

b) Xác định trên đường thẳng AC điểm P sao cho tam giác MPD vuông tại M. Tính diện tích tam giác đó.

c) Tính côsin góc hợp bởi hai đường thẳng MP và PD

DẠNG 2: *Chứng minh các đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài của đoạn thẳng.*

1. Phương pháp giải.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2=\overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=IM^2-IA^2$

Lời giải:

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được

$$VT=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$$

$$=\overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IA}^2=VP \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2: Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0\ (*).$$

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{DA}.\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)$

$=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=0$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$ (2)

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0$ suy ra BH vuông góc với AC

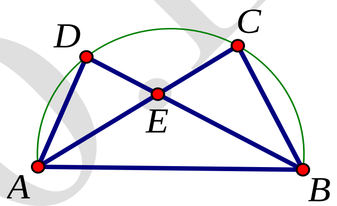
Hay ba đường cao trong tam giác đồng quy (đpcm).

Ví dụ 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=AB^2$

Lời giải (hình 2.4)

Ta có $VT=\overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BE}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$



Hình 2.4

Vì AB là đường kính nên $\widehat{ADB}=90^0,\ \widehat{ACB}=90^0$

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}=0$

Do đó $VT=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\right)=\overrightarrow{AB}^2=VP$ (đpcm).

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp.

Chứng minh rằng $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$

Lời giải:

Ta có: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)^2=0$

$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}=0$

$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+ab\left(IA^2+IB^2-AB^2\right)+$

$+bc\left(IB^2+IC^2-BC^2\right)+ca\left(IA^2+IC^2-CA^2\right)=0$

$\Rightarrow\left(a^2+ab+ca\right)IA^2+\left(b^2+ba+bc\right)IB^2+$

$+\left(c^2+ca+cb\right)IC^2-\left(abc^2+ab^2c+a^2bc\right)=0$

$\Rightarrow\left(a+b+c\right)\left(a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2\right)=\left(a+b+c\right)abc$

$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2=abc$ (đpcm)

3. Bài tập luyện tập:

Bài 2.22. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}=0$.

Bài 2.23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

b) $MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

Bài 2.24: Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

Bài 2.25: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$.

Chứng minh rằng: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Bài 2.26: Cho bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$.

Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$

Bài 2.27: Cho tam giác ABC có ba đường cao là AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'N}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C'P}.\overrightarrow{AB} = 0$

Bài 2.28. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là một điểm tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

Bài 2.29: Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

Bài 2.30. Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC không trùng với B và C. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: $AM^2 = b^2BM^2 + c^2CM^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)BM.CM$

Bài 2.31. Cho lục giác $ABCDEF$ có AB vuông góc với EF và hai tam giác ACE và BDF có cùng trọng tâm. Chứng minh rằng $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

Bài 2.32. Cho tam giác ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O).M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O). Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

Bài 2.33. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, R). MN là một đường kính bất kỳ của đường tròn (O;R)

a) Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2$

b) Chứng minh rằng

$MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = NA^4 + NB^4 + NC^4 + ND^4$.

Bài 2.34 : Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = \vec{0}$ khi và chỉ khi

tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 2.35: Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm I và đường tròn (O;R) bất kỳ chứa I. Các tia $IA_i,\ i = \overline{1,6}$ cắt (O) tại B_i $(i = \overline{1,6})$. Chứng minh rằng

$IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2 = 6R^2$

Bài 2.36. Tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ với M là điểm bất kỳ

b) $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$

Bài 2.37: Cho tam giác ABC có $BAC < 90^0$, $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. M là điểm nằm trong tam giác ABC và nằm trên đường trên đường tròn đường kính BC. Gọi $x,\ y,\ z$ theo thứ tự là diện tích của các tam giác $MBC,\ MCA,\ MAB$. Chứng minh rằng

$$x-y+z\ \ c^2+\ \ x-z+y\ \ b^2=\left(x+y+z+\frac{2yz}{x}\right)a^2$$

✍ **DẠNG 3:** ***Tìm tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức về tích vô hướng hoặc tích độ dài.***

1. Phương pháp giải.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right|=k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R=k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\vec{a}=0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vecto $\vec{a}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vecto $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\dfrac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2$

Lời giải:

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}\Leftrightarrow\ \ \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\ \ \ \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\ \ =\frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2-IA^2=\frac{3a^2}{4}\ \text{(Do } \overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI=a$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=a$

b) Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\ \ \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\ \ =0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\ \ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\ \ \overrightarrow{BC}=0$

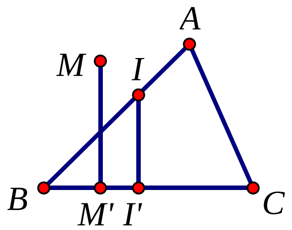
Lời giải (hình 2.4)

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Khi đó $\ \ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\ \ \overrightarrow{BC}=0$

$\Leftrightarrow\left[\ \ \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\ \ +2\ \ \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\ \ \right].\overrightarrow{BC}=3BC^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC}=BC^2$



Hình 2.4

Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC

Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC}$ do đó $\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC} = BC^2$

Vì $BC^2 > 0$ nên $\overrightarrow{M'I'}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

$\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'I'.BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

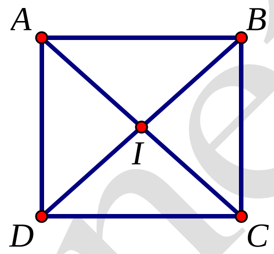
Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC.

Ví dụ 3: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước.

Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = k$

Lời giải (hình 2.5)

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$



Hình 2.5

Ta có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \quad \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \quad \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI} \quad \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} \quad + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$$

Tương tự $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$

Nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = k$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + a^2$$

$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

Nếu $k > -a^2$ thì $MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$

suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.38: Cho đoạn thẳng AB. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

b) $MA^2 + 2MB^2 = k$ với k là số thực dương cho trước.

c) $\overrightarrow{AM}.\vec{a} = k$ với k là số thực cho trước.

Bài 2.39: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \quad 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad = 0$

b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \quad \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \quad = 0$

c) $2MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

Bài 2.40: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $2MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\quad \overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\quad =3a^2$

Bài 2.41. Cho tứ giác ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}IJ^2$.

Bài 2.42 : Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\dfrac{a^2}{4}$

Bài 2.43 : Cho tam giác ABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc BAC sao cho : $AB.AH+AC.AK=AI^2$ trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC

Bài 2.44 : Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2-MB^2=k$.

Bài 2.45 : Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=k$ với k là số cố định cho trước khi :

a) $\alpha+\beta+\gamma=0$ b) $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

DẠNG 4: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

1. Phương pháp giải.

- Cho $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó

+ Tích vô hướng hai vectơ là $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

+ Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

Chú ý: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

- Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng ta sử dụng công thức

+ Nếu $\vec{a}=(x;y)$ thì $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$

+ Nếu $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ thì $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A\ \ 1;2\ \ ,B\ \ -2;6\ \ ,C\ \ 9;8\ \ .$

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính góc B của tam giác ABC

c) Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Lời giải:

a) Ta có $\overrightarrow{AB}\ \ -3;4\ \ ,\overrightarrow{AC}\ \ 8;6\ \ \Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3.8+4.6=0$

Do đó $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\overrightarrow{BC}\ \ 11;2\ \ ,\overrightarrow{BA}\ \ 3;-4$

Suy ra $\cos B=\cos\ \ \overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\ \ =\dfrac{11.3+2.\ \ -4}{\sqrt{11^2+2^2}\sqrt{3^2+\ \ -4\ \ ^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

c) Gọi $H\ \ x;y\ \ $ là hình chiếu của A lên BC.

Ta có $\overrightarrow{AH}\ \ x-1;y-2\ \ ,\overrightarrow{BH}\ \ x+2;y-6\ \ ,\overrightarrow{BC}\ \ 11;2$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11\left(x-1\right)+2\left(y-2\right)=0$

Hay $11x+2y-15=0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\dfrac{x+2}{11}=\dfrac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x-11y+70=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x=\dfrac{1}{5}, y=\dfrac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{32}{5}\right)$

Ví dụ 2: Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I\left(1;1\right)$, đỉnh $A\left(3;2\right)$ và đỉnh B nằm trên trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Lời giải:

Vì B nằm trên trục hoành nên giả sử $B\left(0;y\right)$

Vì I là tâm hình thoi $ABCD$ nên I là trung điểm của AC và BD

Suy ra $C=\left(2x_I-x_A;2y_I-y_A\right)=\left(-1;0\right)$, $D=\left(2x_I-x_B;2y_I-y_B\right)=\left(2;2-y\right)$

Do đó $AB=AD \Leftrightarrow AB^2=AD^2 \Leftrightarrow 9+\left(y-2\right)^2=1+y^2 \Leftrightarrow y=3$

Vậy $B\left(0;3\right)$, $C\left(-1;0\right)$, $D\left(2;-1\right)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$ và $C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để góc $AMB=45^0$

Lời giải:

Giả sử $M\left(x;y\right)$ suy ra $\overrightarrow{MA}\left(3-x;4-y\right)$, $\overrightarrow{MB}\left(2-x;1-y\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(-3;-3\right)$

Vì $AMB=45^0$ suy ra $\left|\cos AMB\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BC}\right)\right|$

$$\Leftrightarrow \cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left|-3\left(3-x\right)-3\left(4-y\right)\right|}{\sqrt{\left(3-x\right)^2+\left(4-y\right)^2}\sqrt{9+9}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(3-x\right)^2+\left(4-y\right)^2}=\left|x+y-7\right|$ (*)

Mặt khác M thuộc đường thẳng BC nên hai vecto $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

Suy ra $\dfrac{2-x}{-3}=\dfrac{1-y}{-3} \Leftrightarrow x=y+1$ thế vào (*) ta được

$\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(4-y\right)^2}=\left|2y-6\right| \Leftrightarrow y^2-6y+8=0 \Leftrightarrow y=2$ hoặc $y=4$

+ Với $y=2 \Rightarrow x=3$, ta có $\overrightarrow{MA}\left(0;2\right)$, $\overrightarrow{MB}\left(-1;-1\right) \Rightarrow \cos AMB=\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $AMB=135^0$ (không thỏa mãn)

+ Với $y=4 \Rightarrow x=5$, $\overrightarrow{MA}\left(-2;0\right)$, $\overrightarrow{MB}\left(-3;-3\right) \Rightarrow \cos AMB=\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $AMB=45^0$

Vậy $M\left(5;4\right)$. là điểm cần tìm.

Ví dụ 4: Cho điểm $A(2; 1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm toạ độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với $b \geq 0$, $c > 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}(-2;c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2) - 1.(c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b+5$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{2^2+(c-1)^2}$

$\qquad = (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5$

Vì $c > 0$ nên $-2b+5 > 0 \Rightarrow 0 \leq b < \dfrac{5}{2}$

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	2	$\frac{5}{2}$
y	5 ↘	1	↗ $\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \dfrac{5}{2}$ là $y = 5$ khi $x = 0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b = 0$, suy ra $c = 5$.

Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ là điểm cần tìm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.46: Cho hai vectơ $\vec{a}(0;4)$; $\vec{b}(4;-2)$

a) Tính cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

b) Xác định tọa độ của vectơ $\vec{c}$ biết $(\vec{a}+2\vec{b}).\vec{c} = -1$ và $(-\vec{b}+2\vec{c}).\vec{a} = 6$

Bài 2.47: Cho tam giác ABC có $A(5;3)$, $B(2;-1)$, $C(-1;5)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC

b) Tính tọa độ chân đường cao vẽ từ A.

c) Tính diện tích tam giác ABC

Bài 2.48: Cho tam giác ABC với $A\ \ 3;1$, $B\ \ -1;-1$, $C\ \ 6;0$.

a) Tính góc A của tam giác ABC

b) Tính tọa độ giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC.

Bài 2.49: Cho ba điểm $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2.50. Các điểm $B\ \ -1;3$, $C\ \ 3;1$ là hai đỉnh của một tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm tọa độ đỉnh A.

Bài 2.51: Cho bốn điểm $A\ \ -8;0$, $B\ \ 0;4$, $C\ \ 2;0$, $D\ \ -3;-5$. Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

Bài 2.52: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A\ \ -2;-1$, $B\ \ 2;-4$.

a) Tìm trên trục Oy điểm M sao cho $MBA = 45^0$.

b) Tìm trên trục Ox điểm N sao cho $NA = NB$

Bài 2.53: Cho hai điểm $A\ \ 4;-3\ \ , B\ \ 3;1\ \ $. Tìm M trên trục hoành sao cho $AMB = 135^0$.

Bài 2.54: Biết $A\ \ 1;-1\ \ , B\ \ 3;0\ \ $ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D

Bài 2.55. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm $A\ \ 1;4\ \ , B\ \ -2;-2\ \ $ và $C\ \ 4;2\ \ $.Xác định tọa độ điểm M sao cho tổng $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất.