§3 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực $k \neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|\left|\vec{a}\right|$

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$

2. Tính chất :

i) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ ii) $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$

iii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ iv) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{array}\right.$

v) $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

- $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa $\vec{b} = k\vec{a}$
- Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

Cho $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{b}$. Với mọi vectơ $\vec{x}$ luôn được biểu diễn $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số thực duy nhất.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

✍ DẠNG 1: Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựng vectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a. điểm M là trung điểm BC. Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}$ b) $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ c) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}$

Lời giải (Hình 1.14)

a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}$ suy ra theo quy tắc ba điểm ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}$$

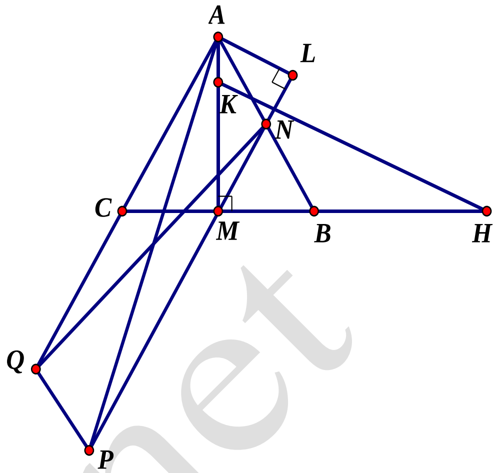
Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}\right|=CA=a$

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$

Theo định lí Pitago ta có

$$MA=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $\left|\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=MA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Hình 1.14

c) Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}$, $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}$

Gọi L là hình chiếu của A lên QN

Vì $MN//AC\Rightarrow ANL=MNB=CAB=60^0$

Xét tam giác vuông ANL ta có

$$\sin ANL=\frac{AL}{AN}\Rightarrow AL=AN.\sin ANL=\frac{a}{2}\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos ANL=\frac{NL}{AN}\Rightarrow NL=AN.\cos ANL=\frac{a}{2}\cos 60^0=\frac{a}{4}$$

Ta lại có $AQ=PN\Rightarrow PL=PN+NL=AQ+NL=2a+\frac{a}{4}=\frac{9a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác ALP ta có

$$AP^2=AL^2+PL^2=\frac{3a^2}{16}+\frac{81a^2}{16}=\frac{21a^2}{4}\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK=\frac{3}{4}MA$, H thuộc tia MB sao cho $MH=2,5MB$.

Khi đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MK}$, $2,5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}$

Do đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HK}$

Ta có $MK=\frac{3}{4}AM=\frac{3}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a}{8}$, $MH=2,5MB=2,5.\frac{a}{2}=\frac{5a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago cho tam tam giác vuông KMH ta có

$$KH=\sqrt{MH^2+MK^2}=\sqrt{\frac{25a^2}{16}+\frac{27a^2}{64}}=\frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Vậy $\left|\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}\right|=KH=\frac{a\sqrt{127}}{8}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a.

a) Chứng minh rằng $\vec{u}=4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

Lời giải (Hình 1.15)

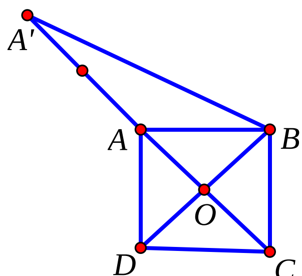
a) Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$\vec{u}=4\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\ -3\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\ +\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\ -2\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}$

$=4\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD}$

Mà $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ nên $\vec{u}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$



Hình 1.15

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Lấy điểm A' trên tia OA sao cho $OA'=3OA$ khi đó

$\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$ do đó $\vec{u}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA'}$

Mặt khác

$BA'=\sqrt{OB^2+OA'^2}=\sqrt{OB^2+9OA^2}=a\sqrt{5}$

Suy ra $\left|\vec{u}\right|=a\sqrt{5}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.26. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi điểm M, N lần lượt là trung điểm BC, CA. Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a) $\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ c) $0,25\overrightarrow{MA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

Bài 1.27: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a.

a) Chứng minh rằng $\vec{u}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

- Các tính chất phép toán vectơ
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

- Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

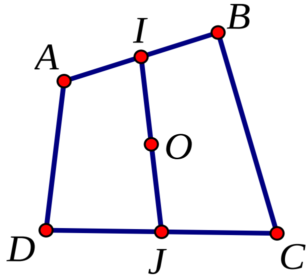
2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì



Hình 1.16

Lời giải (Hình 1.16)

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$
Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên
$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}, \overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD} +2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IJ}$ đpcm

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2 \overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ} =\vec{0}$ đpcm

c) Theo câu b ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA} =\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ đpcm

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

Lời giải

Vì G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1 nên $3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA_1}$
Tương tự G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC_1, ACB_1 suy ra
$3\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC_1}$ và $3\overrightarrow{GG_3}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB_1}$
Cộng theo vế với vế các đẳng thức trên ta có
$\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=2 \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

Mặt khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

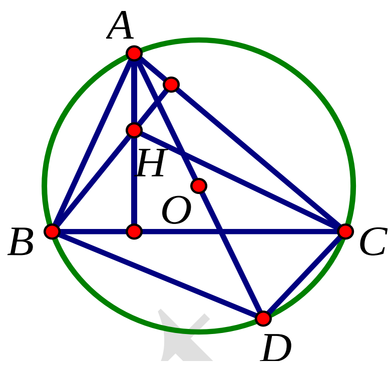
Suy ra $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

c) $\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$



Hình 1.17

Lời giải (Hình 1.17)

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH//DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD//CH$ (vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì

$\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) Theo câu a) ta có

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ đpcm

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

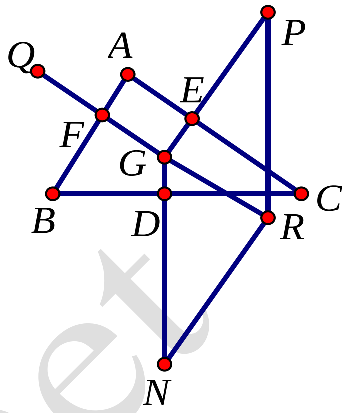
Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC với $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ và có trọng tâm G. Gọi D,E,F lần lượt là hình chiếu G lên cạnh BC,CA,AB.

Chứng minh rằng $a^2.\overrightarrow{GD}+b^2.\overrightarrow{GE}+c^2.\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

Lời giải (hình 1.18)

Trên tia GD, GE, MF lần lượt lấy các điểm N, P, Q sao cho $GN = a,\ GP = b,\ GQ = c$ và dựng hình bình hành $GPRN$



Hình 1.18

Ta có $a^2.\overrightarrow{GD} + b^2.\overrightarrow{GE} + c^2.\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow a.GD.\overrightarrow{GN} + b.GE.\overrightarrow{GP} + c.GF.\overrightarrow{GQ} = \vec{0}$ (*)

Ta có $a.GD = 2S_{\Delta GBC}$, $b.GE = 2S_{\Delta GCA}$, $c.GF = 2S_{\Delta GAB}$, mặt khác G là trọng tâm tam giác ABC nên $S_{\Delta GBC} = S_{\Delta GCA} = S_{\Delta GAB}$ suy ra $a.GD = b.GE = c.GF$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

Ta có $AC = GP = b,\ PR = BC = a$ và $ACB = GPR$ (góc có cặp cạnh vuông góc với nhau)

Suy ra $\Delta ACB = \Delta GPR\ \ c.g.c$

$\Rightarrow GR = AB = c$ và $PGR = BAC$

Ta có $QGP + BAC = 180^0 \Rightarrow QGP + GPR = 180^0 \Rightarrow Q,\ G,\ R$ thẳng hàng do đó G là trung điểm của QR

Theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có

$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

Vậy $a^2.\overrightarrow{GD} + b^2.\overrightarrow{GE} + c^2.\overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

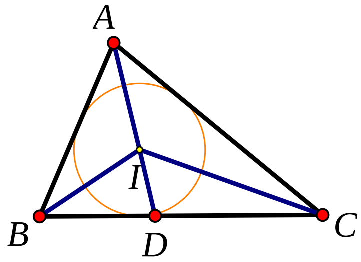
Ví dụ 5: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Lời giải

Cách 1: (Hình 1.19)Gọi D là chân đường phân giác góc A

Do D là đường phân giác giác trong góc A nên ta có



Hình 1.19

$\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \dfrac{c}{b}\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB} = \dfrac{c}{b}\ \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}$

$\Leftrightarrow\ \ b + c\ \ \overrightarrow{ID} = b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}$ (1)

Do I là chân đường phân giác nên ta có :

$\dfrac{ID}{IA} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{BD + CD}{BA + CA} = \dfrac{a}{b + c}$

$\Rightarrow\ \ b + c\ \ \overrightarrow{ID} = -a\overrightarrow{IA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

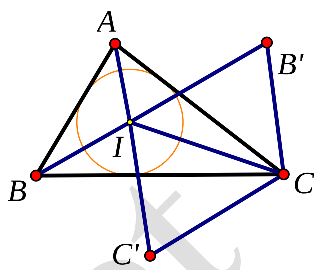
Cách 2: (hình 1.20)Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tại B';song song với BI cắt AI tại A'

Ta có $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$ (*)

Theo định lý Talet và tính chất đường phân giác trong ta có :

$$\frac{IB}{IB'} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \quad (1)$$

Tương tự : $\overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}$ (2)



Hình 1.20

Từ (1) và (2) thay vào (*) ta có :

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.28: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kỳ.

Bài 1.29: Cho tam giác ABC .Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ với M là trung điểm của BC

Bài 1.30: Cho tam giác ABC có điểm M thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$$

Bài 1.31: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

Bài 1.32: Cho tam giác ABC đều tâm O. M là điểm tùy ý trong tam giác. Hạ MD, ME, MF tương ứng vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Bài 1.33: Trong mặt phẳng cho tam giác ABC. Một đường thẳng Δ là đường thẳng bất kỳ. Gọi G là trọng tâm ΔABC và A', B', C', G' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C, G lên đường thẳng Δ.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

Bài 1.34: Cho n vectơ đôi một khác phương và tổng của $n-1$ vectơ bất kì trong n vectơ trên cùng phương với vectơ còn lại. Chứng minh rằng tổng n vectơ cho ở trên bằng vectơ không.

Bài 1.35: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$.

Gọi I là tâm và D, E, F lần lượt là tiếp điểm của cạnh BC, CA, AB của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)\overrightarrow{IA} + \left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right)\overrightarrow{IB} + \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

b) $\cot\frac{A}{2}\overrightarrow{IM} + \cot\frac{B}{2}\overrightarrow{IN} + \cot\frac{C}{2}\overrightarrow{IP} = \vec{0}$

c) $b+c-a\ \ \overrightarrow{IM} + \ a+c-b\ \ \overrightarrow{IN} + \ a+b-c\ \ \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

d) $a\overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{BE} + c\overrightarrow{CF} = \vec{0}$

Bài 1.36: Cho tam giác ABC. M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Chứng minh rằng : $S_{MBC}\,\overrightarrow{MA} + S_{MCA}.\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\,\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Bài 1.37: Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$); $\vec{e_i}, 1 \leq i \leq n$ là vectơ đơn vị vuông góc với $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (xem $A_{n+1} \equiv A_1$) và hướng ra phía ngoài đa giác. Chứng minh rằng

$A_1A_2\vec{e_1} + A_2A_3\vec{e_2} + ... + A_nA_1\vec{e_n} = \vec{0}$ (*định lý con nhím*)

Bài 1.38: Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) với I là tâm đường tròn tiếp xúc các cạnh của đa giác; gọi $\vec{e_i}, 1 \leq i \leq n$ là véc tơ đơn vị cùng hướng với véc tơ $\overrightarrow{IA_i}$. Chứng minh rằng $\cos\frac{A_1}{2}\vec{e_1} + \cos\frac{A_2}{2}\vec{e_2} + ... + \cos\frac{A_n}{2}\vec{e_n} = \vec{0}$

Bài 1.39: Cho tam giác ABC vuông tại A. I là trung điểm của đường cao AH. Chứng minh rằng : $a^2\overrightarrow{IA} + b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

DẠNG 3: Xác định điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ cho trước

1. Phương pháp giải.

- Ta biến đổi đẳng thức vectơ về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn vectơ này chính là điểm M.
- Ta biến đổi về đẳng thức vectơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Lời giải (hình 1.21)

Ta có $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

Hình 1.21

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$

M nằm trên tia AB và $AM=3AB$

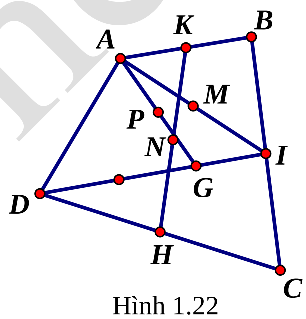
Ví dụ 2: Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm M,N,P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

c) $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$

Lời giải (hình 1.22)



Hình 1.22

a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

Do đó $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}$

Suy ra M là trung điểm AI

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK}+2\overrightarrow{NH}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NH}=\vec{0}\Leftrightarrow$ N là trung điểm của KH

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD khi đó ta có $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{PG}$

Suy ra $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PG}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PG}=\vec{0}\Leftrightarrow P$ là trung điểm AG.

Ví dụ 3: Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha+\beta\neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Từ đó, suy ra với điểm bất kì M thì $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$.

Lời giải

Ta có: $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA}+\beta(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}.\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{AI}=\beta\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$

Vì A, B cố định nên vectơ $\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện.
Từ đó suy ra

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}+(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$$ đpcm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.40: Xác định điểm M biết $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 1.41: Xác định các điểm I, J, K, L biết

$a)\ \overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$b)\ \overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

$c)\ \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}$

$d)\ 2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Bài 1.42: Cho tứ giác $ABCD$. Tìm điểm cố định I và hằng số k để hệ thức sau thỏa mãn với mọi M

$a)\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{MI}$

$b)\ 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MI}$

$c)\ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MI}$

Bài 1.43: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$.

Tìm điểm M sao cho $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 1.44: Cho tam giác ABC và ba số thức $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Nếu $\alpha+\beta+\gamma=0$ thì không tồn tại điểm N sao cho $\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Bài 1.45: Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số $k_1,\ k_2, \ldots, k_n$ mà $k_1+k_2+\ldots+k_n=k\neq 0$

a) Chứng minh rằng có duy nhất điểm G sao cho $k_1\overrightarrow{GA_1}+k_2\overrightarrow{GA_2}+\ldots+k_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

Điểm G như thế gọi là *tâm tỉ cự của hệ điểm* A_i *gắn với hệ số* k_i. Trong trường hợp các hệ số k_i bằng nhau(ta có thể chọn các k_i đều bằng 1) thì G gọi là *trọng tâm của hệ điểm* A_i

b) Chứng minh rằng nếu G là tâm tỉ cự nói ở câu a) thì với điểm M bất kỳ ta có $\frac{1}{k}\ k_1\overrightarrow{MA_1}+k_2\overrightarrow{MA_2}+...+k_n\overrightarrow{MA_n}\ =\overrightarrow{OG}$

DẠNG 4: Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các tính chất phép toán vectơ, ba quy tắc phép toán vectơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. Các ví dụ.

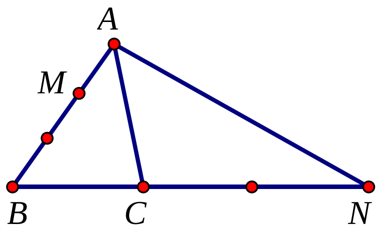
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM},\ \overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{CM}$. Chứng minh I, A, N thẳng hàng

Lời giải (hình 1.23)



Hình 1.23

a) Vì $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB

và $AM=\frac{1}{3}AB$; $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN=2BC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-2\vec{a}+3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{a}+3\vec{b}=-\frac{7}{3}\vec{a}+3\vec{b}.$$

c) Ta có:

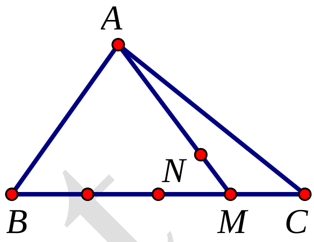
$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}=-\frac{1}{3}(-2\vec{a}+3\vec{b})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}\Rightarrow$ A, I, N thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$



Hình 1.24

Lời giải (hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\ \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\ = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$

Ta có $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

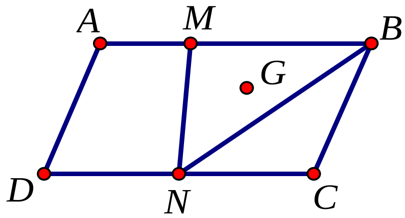
$= -\frac{1}{14}\ \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\ - \frac{3}{14}\ \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}$

$= -\frac{1}{14}\ \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\ - \frac{3}{14}\ -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM,\ CD = 2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{AG}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.25)



Hình 1.25

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên

$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.46: Cho tam giác ABC .Lấy các điểm M,N,P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Có nhận xét gì về ba điểm M, N, P thẳng hàng?

Bài 1.47: Cho tam giác ABC.Gọi I, J là hai điểm xác định bởi

$\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

a)Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b)Đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC

Bài 1.48. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$.

a) Hãy phân tích $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Bài 1.49: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Tìm x sao cho

a) $\vec{u}=\vec{a}+\ 2x-1\ \vec{b}$ và $\vec{v}=x\vec{a}+\vec{b}$ cùng phương

b) $\vec{u}=3\vec{a}+x\vec{b}$ và $\vec{u}=\ 1-x\ \vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ cùng hướng

DẠNG 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau, hai tam giác cùng trọng tâm

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau :

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.

Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tuỳ ý.

- Để chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ cùng trọng tâm ta làm như sau:

Cách 1: Chứng minh G là trọng tâm ΔABC trùng với G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Cách 2: Gọi G là trọng tâm ΔABC (tức ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$) ta đi chứng minh $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$

Do đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \vec{0}$ hay I trùng với J

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử $\dfrac{AM}{AB} = k$ suy ra $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CA}$

Cách 1: Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm ΔABC và ΔMNP

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G'M} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'P} = \vec{0}$ (*)

Ta có $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M} = k\overrightarrow{AB}$

Tương tự $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N} = k\overrightarrow{BC}$

Và $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P} = k\overrightarrow{CA}$

Cộng vế với vế từng đẳng thức trên ta được

$$\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}\right) + 3\overrightarrow{GG'} + \left(\overrightarrow{G'M} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'P}\right) = k\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$$

Kết hợp với (*) ta được $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

Suy ra điều phải chứng minh

Cách 2: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

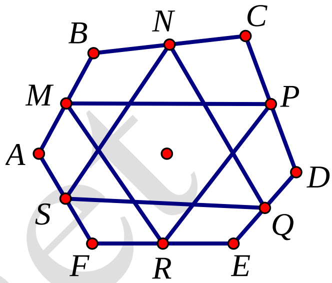
Ta có: $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP}$

$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$

Vậy hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Ví dụ 3: Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.26)



Hình 1.26

Gọi G là trọng tâm của ΔMPR suy ra

$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$ (*)

Mặt khác $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB},\ 2\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD},$

$2\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}.$

$\Rightarrow 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR}) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$ Kết hợp với (*) ta được

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GS} + 2\overrightarrow{GN} + 2\overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

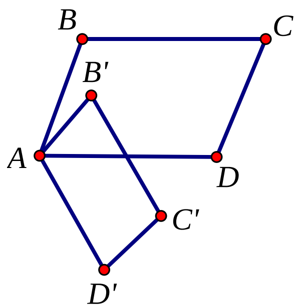
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

Suy ra G là trọng tâm của ΔSNQ.

Vậy ΔMPR và ΔSNQ có cùng trọng tâm.

Ví dụ 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.27)



Hình 1.27

Gọi G là trọng tâm tam giác $BC'D$ suy ra

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$ (1)

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}\ +\ \overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\ +\ \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'}$

$=\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\ -\overrightarrow{AC}-\ \overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}\ +\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$ hay G là trọng tâm tam giác $B'CD'$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.50. Cho các tam giác ABC, $A'B'C'$ có G, G’ lần lượt là trọng tâm .

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm .

Bài 1.51. Cho tam giác ABC , vẽ các hình bình hành $ABIJ, BCPQ, CARS$. Chứng minh rằng ΔRIP, ΔJQS có cùng trọng tâm.

Bài 1.52. Cho tam giác ABC có A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Bài 1.53. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Bài 1.54. Cho tam giác ABC. Gọi A', B' ,C' là các điểm xác định bởi

$2011\overrightarrow{A'B}+2012\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C}+2012\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$,

$2011\overrightarrow{C'A}+2012\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$

Chứng minh rằng ΔABC và $\Delta A'B'C'$ cùng trọng tâm

Bài 1.55. Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm G, gọi G_1, G_2, G_3 là trọng tâm các tam giác BCA', CAB', ABC'.Chứng minh rằng $\Delta G_1G_2G_3$ cũng có trọng tâm G

Bài 1.56. Cho tứ giác $ABCD$ có trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác ΔABC, ΔBCD, ΔCDA, ΔDAB. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$

Bài 1.57. Cho tam giác ABC đều và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng tam giác ABC và A_1, B_1, C_1 có cùng trọng tâm.

Bài 1.58. Cho các tam giác ABC, điểm O nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của O lên BC, CA, AB. Lấy các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc các tia OA_1, OB_1, OC_1 sao cho $OA_2 = a$, $OB_2 = b$, $OC_2 = c$. Chứng minh O là trọng tâm tam giác $A_2B_2C_2$

✍ **DẠNG 6: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vectơ cho trước.**

1. Phương pháp giải.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
- Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right| = k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì
 + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in R$
 + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$
 + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, $B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$.

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\dfrac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$ $\Rightarrow$ I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=9\overrightarrow{MI}+(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC})=9\overrightarrow{MI}$ và

$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$ nên

$|\,2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\,|=|\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\,|\Leftrightarrow|\,9\overrightarrow{MI}\,|=|\,\overrightarrow{AB}\,|\Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{9}$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AB}{9}$.

***Ví dụ 2*:** Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\ \ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ với k là số thực thay đổi

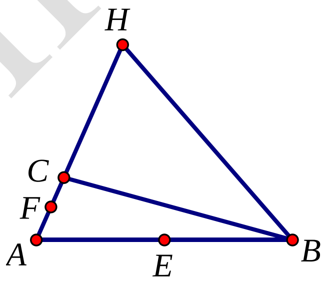
Lời giải (hình 1.28)

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{ME}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow ME=MF$



Hình 1.28

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\ \ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\ \ -3\ \ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$

$=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HB}$

Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\ \ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

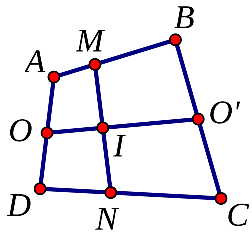
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}=2k\overrightarrow{HB}\Leftrightarrow\overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{HB}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

Ví dụ 3: Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải (hình 1.29)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C}$
Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OO'}$
Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{OI}$
Do đó $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\ \ k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}\ \ = k\overrightarrow{OO'}$



Hình 1.29

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.59. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|$ b) $\left|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$

Bài 1.60. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ với k là số thực thay đổi

b) $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ cùng phương với véc tơ $\overrightarrow{BC}$

c) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|$ (HD: dựng hình bình hành ABCD)

Bài 1.61. Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

$a)\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right| = \left|3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|$

$b)\left|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$

Bài 1.62: Cho tứ giác $ABCD$.

a)Xác định điểm O sao cho : $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$.

b)Tìm tập hợp điểm M thoả mãn hệ thức $\left|\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right| = \left|3\overrightarrow{MA}\right|$

Bài 1.63: Cho lục giác đều ABCDEF . Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + \left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right|$ nhận giá trị nhỏ nhất

Bài 1.64: Trên hai tia Ox và Oy của góc xOy lấy hai điểm M, N sao cho $OM + ON = a$ với a là số thực cho trước. tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN

✍ DẠNG 7: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ

1. Phương pháp giải.

Phân tính được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả " $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow m=n=0$ với $\vec{a},\ \vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương "

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác $ABCD$. Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BM};\ \overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AN}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}+5\overrightarrow{MP}$

$=5\overrightarrow{AP}-4\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AN}-2\overrightarrow{AD}$

$=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})-2\overrightarrow{AD}$

$=2\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn: $a^2\overrightarrow{GA}+b^2\overrightarrow{GB}+c^2\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Lời giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}.$

Suy ra $\quad a^2\overrightarrow{GA}+b^2\overrightarrow{GB}+c^2\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow a^2\ \ -\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}\ \ +b^2\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow\ \ b^2-a^2\ \ \overrightarrow{GB}+\ \ c^2-a^2\ \ \overrightarrow{GC}=\vec{0}.\ \ *$

Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vecơ không cùng phương, do đó (*) tương đương với:

$\begin{cases}b^2-a^2=0\\ c^2-a^2=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c$ hay tam giác ABC đều.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thoả mãn $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$. Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{AB'}=m\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AC'}=n\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

và $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

Mặt khác A' là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Do đó $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + m\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + n\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

hay $\left(n - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương suy ra $m = n = \frac{1}{2}$ do đó B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB

Vậy BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

3. Bài tập luyên tập.

Bài 1.65: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O thoả mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 1.66: Cho ABC có BB', CC' là các trung tuyến, A' là điểm trên BC thoả mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh AA' cũng là trung tuyến của tam giác ABC.

Bài 1.67: Cho ABC có A', B', C' là các điểm thay đổi trên BC, CA, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy và thoả mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ Chứng minh AA', BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Bài 1.68: Cho 4 điểm A, B, C, D; I là trung điểm AB và J thuộc CD thoả mãn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$. Chứng minh J là trung điểm của CD.

Bài 1.69: Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử tồn tại điểm O sao cho $OA = OB = OC = OD$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

Bài 1.70: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, gọi G là trọng tâm tam giác ABC. A', B', C' là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OC'}$. Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác $A'B'C'$.

Bài 1.71: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, gọi H là trực tâm tam giác . A', B', C' là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OC}$. Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Bài 1.72: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng AM cắt BC tại D, BM cắt CA tại E và CM cắt AB tại F. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ thì M là trọng tâm tam giác ABC.

✍ DẠNG 8: Chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị liên quan đến độ dài vectơ

1. Phương pháp.

- Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có

+ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$, dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

+ $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$, dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng

- Đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm cực trị của $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ với M thay đổi

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường thẳng Δ khi đó $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của M lên Δ.

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường tròn (O) khi đó $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn; $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia IO với đường tròn

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $T = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

Lời giải:

Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBI$ thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Khi đó : $T = \left| \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA} \;+\; \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB} \;-\; \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC} \right|$

$$= \left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{MI}\right|$$

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T = AA' + BB' + CC'$

Giải: Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{BG}+$$
$$+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$$

$$=3\overrightarrow{GG'}-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'})=3\overrightarrow{GG'}$$

Do đó:

$$AA'+BB'+CC'=\left|\overrightarrow{AA'}\right|+\left|\overrightarrow{BB'}\right|+\left|\overrightarrow{CC'}\right|\geq\left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right|$$

$$=3\left|\overrightarrow{GG'}\right|=3GG'$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ cùng hướng

Vậy giá trị nhỏ nhất T là $3GG'$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.73: Cho tam giác ABC, đường thẳng d và ba số α,β,γ sao cho $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức $T=\left|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 1.74: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trên đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$

a) Đạt giá trị lớn nhất

b) Đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 1.75: Cho tứ giác $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các tứ giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T=AA'+BB'+CC'+DD'$

Bài 1.76: Cho tam giác ABC. M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$. Chứng minh rằng các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

Do đó các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

Bài 1.77 : Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc cạnh AB và không trùng với các đỉnh ta có: $MC.AB<MA.BC+MB.AC$

Bài 1.78: Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thuộc đoạn CD. Gọi $p,\ p_1,\ p_2$ lần lượt là chu vi của các tam giác $AMB,\ ACB,\ ADB$. Chứng minh rằng $p<\max\quad p_1;p_2$.

Bài 1.79: Trên đường tròn tâm O bán kính bằng 1 lấy $2n+1$ điểm $P_i,\ i=1,2,...,2n+1\quad n\in N$ ở cùng phía với đối với đường kính nào đó.

Chứng minh rằng $\left|\sum_{i=1}^{2n+1}\overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1$