

## §5 SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp ta không thể biết được giá trị đúng của đại lượng mà ta chỉ biết số gần đúng của nó.

**Ví dụ:** giá trị gần đúng của  $\pi$  là 3,14 hay 3,14159; còn đối với  $\sqrt{2}$  là 1,41 hay 1,414;...

Như vậy có sự sai lệch giữa giá trị chính xác của một đại lượng và giá trị gần đúng của nó. Để đánh giá mức độ sai lệch đó, người ta đưa ra khái niệm sai số tuyệt đối.

#### 2. Sai số tuyệt đối:

##### a) Sai số tuyệt đối của số gần đúng

Nếu  $a$  là số gần đúng của  $\bar{a}$  thì  $\Delta_a = |\bar{a} - a|$  được gọi là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng  $a$ .

##### • Độ chính xác của một số gần đúng

Trong thực tế, nhiều khi ta không biết  $\bar{a}$  nên ta không tính được  $\Delta_a$ . Tuy nhiên ta có thể đánh giá  $\Delta_a$  không vượt quá một số dương  $d$  nào đó.

Nếu  $\Delta_a \leq d$  thì  $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$ , khi đó ta viết  $\bar{a} = a \pm d$   
 $d$  gọi là **độ chính xác của số gần đúng**.

##### b) Sai số tương đối

**Sai số tương đối** của số gần đúng  $a$ , kí hiệu là  $\delta_a$  là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và  $|a|$ , tức là

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}.$$

**Nhận xét:** Nếu  $\bar{a} = a \pm d$  thì  $\Delta_a \leq d$  suy ra  $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$ . do đó  $\frac{d}{|a|}$  **càng nhỏ** thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán **càng cao**.

### 3. Quy tròn số gần đúng

#### • Nguyên tắc quy tròn các số như sau:

- Nếu chữ số **ngay sau hàng quy tròn** nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.
- Nếu chữ số **ngay sau hàng quy tròn** lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0 và cộng thêm một đơn vị vào số hàng vi tròn.

**Nhận xét:** Khi thay số đúng bởi số qui tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số qui tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng qui tròn. Như vậy, độ chính xác của số qui tròn bằng nửa đơn vị của hàng qui tròn.

#### **Chú ý:** Các viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước:

Cho số gần đúng  $a$  với độ chính xác  $d$ . Khi được yêu cầu quy tròn  $a$  mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn  $a$  đến hàng cao nhất mà  $d$  **nhỏ hơn một đơn vị** của hàng đó.

### 4. Chữ số chắc (đáng tin)

Cho số gần đúng  $a$  của số  $\bar{a}$  với độ chính xác  $d$ . Trong số  $a$ , một chữ số được gọi là **chữ**

**số chắc** (hay **đáng tin**) nếu  $d$  không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

**Nhận xét:** Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.

### 5. Dạng chuẩn của số gần đúng

- Nếu số gần đúng là số thập phân không nguyên thì dạng chuẩn là dạng mà mọi chữ số của nó đều là chữ chắc chắn.

- Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là  $A \cdot 10^k$  trong đó **A là số nguyên**,  $k$  là hàng thấp nhất có chữ số chắc ( $k \in \mathbb{N}$ ). (suy ra mọi chữ số của A đều là chữ số chắc chắn)

Khi đó độ chính xác  $d = 0,5 \cdot 10^k$ .

### 6. Kí hiệu khoa học của một số

Mọi số thập phân khác 0 đều viết được dưới dạng  $\alpha \cdot 10^n$ ,  $1 \leq |\alpha| < 10$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (Quy ước

$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ ) dạng như vậy được gọi là **kí hiệu khoa học** của số đó.

## B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

### ➤ DẠNG TOÁN 1: TÍNH SAI SỐ TUYỆT ĐỐI, SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI CỦA SỐ GẦN ĐÚNG. VIẾT SỐ QUY TRÒN.

#### 1. Các ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Độ dài của cái cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là  $996m \pm 0,5m$ . Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

**Lời giải**

Ta có độ dài gần đúng của cầu là  $a = 996$  với độ chính xác  $d = 0,5$

Vì sai số tuyệt đối  $\Delta_a \leq d = 0,5$  nên sai số tương đối  $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,5}{996} \approx 0,05\%$

Vậy sai số tương đối tối đa trong phép đo trên là  $0,05\%$ .

**Ví dụ 2:** Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng  $a, b$  biết sai số tương đối của chúng.

a)  $a = 123456$ ,  $\delta_a = 0,2\%$                       b)  $a = 1,24358$ ,  $\delta_a = 0,5\%$

**Lời giải**

Ta có  $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Leftrightarrow \Delta_a = |a| \delta_a$

a) Với  $a = 123456$ ,  $\delta_a = 0,2\%$  ta có sai số tuyệt đối là

$$\Delta_a = 123456 \cdot 0,2\% = 146,912$$

b) Với  $a = 1,24358$ ,  $\delta_a = 0,5\%$  ta có sai số tuyệt đối là

$$\Delta_a = 1,24358 \cdot 0,5\% = 0,0062179.$$

**Ví dụ 3:** Làm tròn các số sau với độ chính xác cho trước.

a)  $a = 2,235$  với độ chính xác  $d = 0,002$

b)  $a = 23748023$  với độ chính xác  $d = 101$

**Lời giải**

a) Ta có  $0,001 < 0,002 < 0,01$  nên hàng cao nhất mà  $d$  nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm

Do đó ta phải quy tròn số  $a = 2,235$  đến hàng phần trăm suy ra  $\bar{a} \approx 2,24$ .

b) Ta có  $100 < 101 < 1000$  nên hàng cao nhất mà  $d$  nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng nghìn

Do đó ta phải quy tròn số  $a = 23748023$  đến hàng nghìn suy ra  $\bar{a} \approx 23748000$ .

**Ví dụ 4:** a) Hãy viết giá trị gần đúng của  $\sqrt{8}$  chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn biết  $\sqrt{8} = 2,8284\dots$ . Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

b) Hãy viết giá trị gần đúng của  $\sqrt[3]{2015^4}$  chính xác đến hàng chục và hàng trăm biết  $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71\dots$ . Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{8} = 2,8284\dots$  do đó giá trị gần đúng của  $\sqrt{8}$  đến hàng phần trăm là  $2,83$

Ta có  $|\sqrt{8} - 2,83| = 2,83 - \sqrt{8} \leq 2,83 - 2,8284 = 0,0016$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng  $2,83$  không vượt quá  $0,0016$ .

Giá trị gần đúng của  $\sqrt{8}$  đến hàng phần nghìn là  $2,828$

Ta có  $|\sqrt{8} - 2,828| = \sqrt{8} - 2,828 \leq 2,8284 - 2,828 = 0,0004$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng  $2,828$  không vượt quá  $0,0004$ .

b) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có  $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71966\dots$

Do đó giá trị gần đúng của  $\sqrt[3]{2015^4}$  đến hàng chục là  $25450$

Ta có  $|\sqrt[3]{2015^4} - 25450| = \sqrt[3]{2015^4} - 25450 \leq 25450,72 - 25450 = 0,72$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng  $25450$  không vượt quá  $0,72$ .

Giá trị gần đúng của  $\sqrt[3]{2015^4}$  đến hàng trăm là  $25500$ .

Ta có  $|\sqrt[3]{2015^4} - 25500| = 25500 - \sqrt[3]{2015^4} \leq 25500 - 25450,71 = 49,29$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng  $25500$  không vượt quá  $49,29$ .

**Ví dụ 5:** Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là  $x = 23m \pm 0,01m$  và chiều rộng là  $y = 15m \pm 0,01m$ . Chứng minh rằng

a) Chu vi của ruộng là  $P = 76m \pm 0,04m$

b) Diện tích của ruộng là  $S = 345m \pm 0,3801m$

**Lời giải**

a) Giả sử  $x = 23 + a$ ,  $y = 15 + b$  với  $-0,01 \leq a, b \leq 0,01$

Ta có chu vi ruộng là  $P = 2x + y = 2 \cdot 23 + 15 + a + b = 61 + 2a + b$

Vì  $-0,01 \leq a, b \leq 0,01$  nên  $-0,04 \leq 2a + b \leq 0,04$

Do đó  $|P - 61| = |2a + b| \leq 0,04$

Vậy  $P = 61m \pm 0,04m$

b) Diện tích ruộng là  $S = x \cdot y = (23 + a)(15 + b) = 345 + 23b + 15a + ab$

Vì  $-0,01 \leq a, b \leq 0,01$  nên  $|23b + 15a + ab| \leq 23 \cdot 0,01 + 15 \cdot 0,01 + 0,01 \cdot 0,01$

hay  $|23b + 15a + ab| \leq 0,3801$  suy ra  $|S - 345| \leq 0,3801$

Vậy  $S = 345m \pm 0,3801m$ .

### **3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.48:** Theo thống kê dân số Việt Nam năm 2002 là 79715675 người. Giả sử sai số tuyệt đối nhỏ hơn 10000. Hãy viết quy tròn của số trên.

**Bài 1.49:** Đo độ cao một ngọn núi là  $h = 1372,5m \pm 0,1m$ . Hãy viết số quy tròn của số 1372,5

**Bài 1.50:** Đo độ cao một ngọn cây là  $h = 347,13m \pm 0,2m$ . Hãy viết số quy tròn của số 347,13

**Bài 1.51:** Cho giá trị gần đúng của  $\pi$  là  $a = 3,141592653589$  với độ chính xác là  $10^{-10}$ . Hãy viết số quy tròn của a.

**Bài 1.52.** Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của mỗi số sau, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn :

a)  $\sqrt{3}$  ;

b)  $\pi^2$ .

**Bài 1.53:** Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây :

a)  $\bar{a} = 17658 \pm 16$  ;

b)  $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$ .

**Bài 1.54:** Cho  $a = 15 \pm 0,002$ ,  $b = 0,123 \pm 0,001$ ,  $c = 13 \pm 0,05$  Chứng minh rằng:

a)  $a + b = 15,123 \pm 0,003$

b)  $20a - 10b + c = 311,77 \pm 0,1$

c)  $a + bc = 16,599 \pm 0,02115$

**Bài 1.55:** Cho số  $x = \frac{2}{7}$ . Cho các giá trị gần đúng của x là : 0,28 ; 0,29 ; 0,286. Hãy xác

định sai số tuyệt đối trong từng trường hợp và cho biết giá trị gần đúng nào là tốt nhất.

**Bài 1.56:** Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng  $x = 43m \pm 0,5m$  và chiều dài  $y = 63m \pm 0,5m$ . Chứng minh rằng chu vi P của miếng đất là  $P = 212m \pm 2m$ .

**Bài 1.57:** Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh đo được như sau :

$a = 12\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$  ;  $b = 10,2\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$  ;  $c = 8\text{ cm} \pm 0,1\text{ cm}$ .

Tính chu vi P của tam giác và đánh giá sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số gần đúng của chu vi qua phép đo.

## **➤ DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH CÁC CHỮ SỐ CHẮC CỦA MỘT SỐ GẦN ĐÚNG, DẠNG CHUẨN CỦA CHỮ SỐ GẦN ĐÚNG VÀ KÍ HIỆU KHOA HỌC CỦA MỘT SỐ.**

### **1. Các ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Tìm số chắc và viết dạng chuẩn của số gần đúng a biết

a) Số người dân tỉnh Nghệ An là  $a = 3214056$  người với độ chính xác  $d = 100$  người.

b)  $a = 1,3462$  sai số tương đối của a bằng 1%.

**Lời giải**

a) Vì  $\frac{100}{2} = 50 < 100 < \frac{1000}{2} = 500$  nên chữ số hàng trăm (số 0) không là số chắc, còn chữ số hàng nghìn (số 4) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là 1, 2, 3, 4.

Cách viết dưới dạng chuẩn là  $3214 \cdot 10^3$ .

b) Ta có  $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow \Delta_a = \delta_a \cdot |a| = 1\% \cdot 1,3462 = 0,013462$

Suy ra độ chính xác của số gần đúng  $a$  không vượt quá 0,013462 nên ta có thể xem độ chính xác là  $d = 0,013462$ .

Ta có  $\frac{0,01}{2} = 0,005 < 0,013462 < \frac{0,1}{2} = 0,05$  nên chữ số hàng phần trăm (số 4) không là số chắc, còn chữ số hàng phần chục (số 3) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là 1 và 3.

Cách viết dưới dạng chuẩn là 1,3.

**Ví dụ 2:** Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn

a)  $a = 467346 \pm 12$                       b)  $b = 2,4653245 \pm 0,006$

**Lời giải**

a) Ta có  $\frac{10}{2} = 5 < 12 < \frac{100}{2} = 50$  nên chữ số hàng trăm trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là  $4673 \cdot 10^2$ .

b) Ta có  $\frac{0,01}{2} = 0,005 < 0,006 < \frac{0,1}{2} = 0,05$  nên chữ số hàng phần chục trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là 2,5.

**Ví dụ 3:** Các nhà khoa học Mỹ đang nghiên cứu liệu một máy bay có thể có tốc độ gấp bảy lần tốc độ ánh sáng. Với máy bay đó trong một năm (giả sử một năm có 365 ngày) nó bay được bao nhiêu? Biết vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s. Viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học.

**Lời giải**

Ta có một năm có 365 ngày, một ngày có 24 giờ, một giờ có 60 phút và một phút có 60 giây. Vậy một năm có  $24 \cdot 365 \cdot 60 \cdot 60 = 31536000$  giây.

Vì vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s nên trong vòng một năm nó đi được  $31536000 \cdot 300 = 9,4608 \cdot 10^9$  km.

**2. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.58:** Một hình lập phương có thể tích  $V = 180,57 \text{ cm}^3 \pm 0,05 \text{ cm}^3$ . Xác định các chữ số chắc chắn của  $V$ .

**Bài 1.59:** Số dân của một tỉnh là  $A = 1034258 \pm 300$  (người). Hãy tìm các chữ số chắc và viết  $A$  dưới dạng chuẩn.

**Bài 1.60:** Người ta đo chu vi của một khu vườn là  $P = 213,7 \text{ m} \pm 1,2 \text{ m}$ . Hãy đánh giá sai số

tương đối của phép đo trên và viết kết quả tìm được dưới dạng khoa học.

**Bài 1.61:** Khi xây một hồ cá hình tròn người ta đo được đường kính của hồ là 8,52m với độ chính xác đến 1cm.. Hãy đánh giá sai số tương đối của phép đo trên và viết kết quả tìm được dưới dạng khoa học .

**Bài 1.62:** Đo chiều dài của một con dúc, ta được số đo  $a = 192,55 \text{ m}$ , với sai số tương đối không vượt quá 0,3%. Hãy tìm các chữ số chắc của  $a$  và nêu cách viết chuẩn giá trị gần đúng của  $a$ .

**Bài 1.63:** Cho  $3,141592 < \pi < 3,141593$ . Hãy viết giá trị gần đúng của số  $\pi$  dưới dạng chuẩn và đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này trong mỗi trường hợp sau :

- Giá trị gần đúng của  $\pi$  có 5 chữ số chắc ;
- Giá trị gần đúng của  $\pi$  có 6 chữ số chắc ;
- Giá trị gần đúng của  $\pi$  có 3 chữ số chắc.