§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa.

- Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$ với a, b là số thực và $a \neq 0$
- Phương trình bậc hai một ẩn phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với a, b, c là số thực và $a \neq 0$

2. Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$ (1).

- Nếu $a \neq 0$: $(1) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
- Nếu $a = 0$: phương trình (1) trở thành $0x + b = 0$
  Th1: Với $b = 0$ phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$
  Th2: Với $b \neq 0$ phương trình vô nghiệm

3. Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

- Nếu $a = 0$: trở về giải và biện luận phương trình dạng (1)
- Nếu $a \neq 0$: $\Delta = b^2 - 4ac$

  Th1: $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

  TH2: $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$

  Th3: $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

4. Định lí Vi-ét và ứng dụng.

a) Định lí Vi-ét.

Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thỏa mãn hệ thức $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

b) Ứng dụng.

- Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai
- Phân tích thành nhân tử: Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng: Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.
- Xét dấu của các nghiệm phương trình bậc hai:

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (*), kí hiệu $S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$ khi đó

+ Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$

+ Phương trình (*) có hai nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

+ Phương trình (*) có hai nghiệm âm khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH DẠNG** $ax + b = 0$**.**

1. Phương pháp giải.

Để giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ ta dựa vào kết quả đã nêu ở trên.

Lưu ý:

- Phương trình $ax + b = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a = b = 0 \end{array}\right.$
- Phương trình $ax + b = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$
- Phương trình $ax + b = 0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $m - 1\ \ x + 2 - m = 0$ b) $m\ \ mx - 1\ \ = 9x + 3$

c) $(m+1)^2 x = (3m+7)x + 2 + m$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $m - 1\ \ x = m - 2$

+ Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$: Phương trình trở thành $0x = -1$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

+ Với $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$: Phương trình tương đương với $x = \dfrac{m-2}{m-1}$

Kết luận

$m = 1$: Phương trình vô nghiệm

$m \neq 1$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m-2}{m-1}$

b) Ta có $m\ \ mx - 1\ \ = 9x + 3 \Leftrightarrow\ \ m^2 - 9\ \ x = m + 3$

+ Với $m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$:

- Khi $m = 3$: Phương trình trở thành $0x = 6$ suy ra phương trình vô nghiệm
- Khi $m = -3$: Phương trình trở thành $0x = 0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$

+ Với $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$: Phương trình tương đương với $x = \dfrac{m+3}{m^2-9} = \dfrac{1}{m-3}$.

Kết luận:
$m = 3$: Phương trình vô nghiệm
$m = -3$: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$
$m \neq \pm 3$: Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{m-3}$

c) Phương trình tương đương với $\left[(m+1)^2 - 3m - 7\right]x = 2 + m$

$\Leftrightarrow \; m^2 - m - 6 \;\; x = 2 + m$

+ Với $m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -2 \end{array}\right.$:

- Khi $m = 3$: Phương trình trở thành $0x = 5$ suy ra phương trình vô nghiệm
- Khi $m = -2$: Phương trình trở thành $0x = 0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$

+ Với $m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq 3 \\ m \neq -2 \end{array}\right.$: Phương trình tương đương với $x = \dfrac{m+2}{m^2-m-6} = \dfrac{1}{m-3}$.

Kết luận:
$m = 3$: Phương trình vô nghiệm
$m = -2$: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$
$m \neq 3$ và $m \neq -2$: Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{m-3}$

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình sau với a, b là tham số.

a) $a^2 \;\; x - a \;\; = b^2 \;\; x - b$ b) $b \;\; ax - b + 2 \;\; = 2 \;\; ax + 1$

Lời giải

a) Ta có $a^2 \;\; x - a \;\; = b^2 \;\; x - b \;\; \Leftrightarrow \;\; a^2 - b^2 \;\; x = a^3 - b^3$

+ Với $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm b$

- Khi $a = b$: Phương trình trở thành $0x = 0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$
- Khi $a = -b$ và $b \neq 0$: Phương trình trở thành $0x = -2b^3$ suy ra phương trình vô nghiệm

(Trường hợp $a = -b, b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ thì rơi vào trường hợp $a = b$)

+ Với $a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b$: Phương trình tương đương với $x = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$

Kết luận

$a = b$: phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$

$a = -b$ và $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm

$a \neq \pm b$: Phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$

b) Ta có $b(ax - b + 2) = 2(ax + 1) \Leftrightarrow a(b - 2)x = b^2 - 2b + 2$

+ Với $a(b - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 2 \end{array}\right.$

- Khi $a = 0$: Phương trình trở thành $0x = b^2 - 2b + 2$, do $b^2 - 2b + 2 = (b - 1)^2 + 1 > 0$ nên phương trình vô nghiệm.
- Khi $b = 2$: Phương trình trở thành $0x = 2$ suy ra phương trình vô nghiệm

+ Với $a(b - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 2 \end{cases}$: Phương trình tương đương với $x = \dfrac{b^2 - 2b + 2}{a(b - 2)}$.

Kết luận

$a = 0$ hoặc $b = 2$ thì phương trình vô nghiệm

$a \neq 0$ và $b \neq 2$ thì phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{b^2 - 2b + 2}{a(b - 2)}$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất.

a) $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$

b) $m(4mx - 3m + 2) = x(m + 1)$

Lời giải

a) Ta có $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1 \Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x = m^2 - 1$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$ hay $m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

Vậy với $m \neq -1$ và $m \neq 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất

b) Ta có $m(4mx - 3m + 2) = x(m + 1) \Leftrightarrow (4m^2 - m - 1)x = 3m^2 - 2m$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$ hay $4m^2 - m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$

Vậy với $m \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hai hàm số sau không cắt nhau $y = \ m+1\ x^2 + 3m^2x + m\ $ và $y = \ m+1\ x^2 + 12x + 2$.

Lời giải

Đồ thị hai hàm số không cắt nhau khi và chỉ khi phương trình

$\ m+1\ x^2 + 3m^2x + m = \ m+1\ x^2 + 12x + 2$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow 3\ m^2 - 4\ x = 2 - m$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy với $m = -2$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.5: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $\ 2m - 4\ x + 2 - m = 0$ b) $(m+1)x = (3m^2 - 1)x + m - 1$

Bài 3.6: Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $\dfrac{x+a-b}{a} - \dfrac{x+b-a}{b} = \dfrac{b^2 - a^2}{ab}$ (1)

b) $\dfrac{ax-1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{a\ \ x^2+1}{x^2-1}$ (2)

Bài 3.7: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm.

a) $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$

b) $m^2\ \ x - m\ \ = x - 3m + 2$

Bài 3.8: Tìm điều kiện của a, b để phương trình sau có nghiệm .

a) $a\ \ bx - a + 2\ \ = \ \ a + b - 1\ \ x + 1$

b) $\dfrac{2x-a}{a} - b = \dfrac{2x-b}{b} - a \ \ (a, b \neq 0)$

➢ **DẠNG TOÁN 2: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax^2 + bx + c = 0$.**

1. Phương pháp giải.

Để giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ta làm theo như các bước đã nêu ở trên.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $x^2 - x + m = 0$ b) $\ m+1\ x^2 - 2mx + m - 2 = 0$

c) $\ 2m^2 + 5m + 2\ x^2 - 4mx + 2 = 0$

Lời giải

a) Ta có $\Delta = 1 - 4m$

Với $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{4}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4m}}{2}$

Với $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép $x = \dfrac{1}{2}$

Với $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$: Phương trình vô nghiệm

Kết luận

$m < \dfrac{1}{4}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4m}}{2}$

$m = \dfrac{1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép $x = \dfrac{1}{2}$

$m > \dfrac{1}{4}$: Phương trình vô nghiệm

b) + TH1: Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ khi đó phương trình trở thành $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

+ TH2: Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ khi đó phương trình trên là phương trình bậc hai

Ta có $\Delta' = m^2 - \ m - 2 \quad m + 1 \ = m + 2$

Khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$ khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x = \dfrac{m \pm \sqrt{m+2}}{m+1}$

Khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ khi đó phương trình có nghiệm là $x = 2$

Khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$ khi đó phương trình vô nghiệm

Kết luận

$m = -1$: phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3}{2}$

$m = -2$: phương trình có nghiệm là $x = 2$

$m > -2$ và $m \neq -1$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{m \pm \sqrt{m+2}}{m+1}$

$m < -2$: phương trình vô nghiệm

c) $2m^2 + 5m + 2 \ \ x^2 - 4mx + 2 = 0$

+ TH1: Với $2m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Khi $m=-2$ phương trình trở thành $8x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

Khi $m=-\dfrac{1}{2}$ phương trình trở thành $2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$

+ TH2: Với $2m^2+5m+2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ khi đó phương trình đã cho là phương trình bậc hai

Ta có $\Delta = 4m^2 - 2(2m^2+5m+2) = -2(5m+2)$

Khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow -2(5m+2) > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{2}{5}$ khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x = \dfrac{2m \pm \sqrt{-2(5m+2)}}{2m^2+5m+2}$

Khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{2}{5}$ phương trình có nghiệm kép $x=-5$

Khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{2}{5}$ phương trình vô nghiệm.

Kết luận

$m=-2$ phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{1}{4}$

$m=-\dfrac{1}{2}$ phương trình có nghiệm $x=-1$

$m=-\dfrac{2}{5}$ phương trình có nghiệm (kép) $x=-5$

$m<-\dfrac{2}{5}$, $m \neq -2$ và $m \neq -\dfrac{1}{2}$ khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x = \dfrac{2m \pm \sqrt{-2(5m+2)}}{2m^2+5m+2}$

$m > -\dfrac{2}{5}$ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình sau với a, b là tham số.

$$ax^2 - 2(a+b)x + a + 2b = 0$$

Lời giải

+ TH1: Với $a=0$ phương trình trở thành $-2bx+2b=0 \Leftrightarrow bx=b$

Khi $b=0$ phương trình là $0x=0$ do đó phương trình nghiệm đúng với mọi x

Khi $b\neq 0$ phương trình có nghiệm là $x=1$

+ TH2: Với $a\neq 0$ phương trình là phương trình bậc hai

Ta có $\Delta' = \ a+b\ ^2 - a\ \ a+2b\ \ = b^2$

Khi $b=0$ phương trình có nghiệm kép $x=\dfrac{a+b}{a}$

Khi $b\neq 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a+b+b}{a}=\dfrac{a+2b}{a} \\ x=\dfrac{a+b-b}{a}=1 \end{array}\right.$

Kết luận

$a=b=0$ phương trình nghiệm đúng với mọi x

$a=0$ và $b\neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

$a\neq 0$ và $b=0$ phương trình có nghiệm kép $x=\dfrac{a+b}{a}$

$a\neq 0$ và $b\neq 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\dfrac{a+2b}{a}$ và $x=1$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $mx^2+x+m+1=0$

a) Có nghiệm kép.

b) Có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Với $m=0$ phương trình trở thành phương trình bậc nhất $x+1=0$ suy ra $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m\neq 0$ $m\neq 0$ phương trình trên là phương trình bậc hai nên nó có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 1-4m\ \ m+1\ \ =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4m^2-4m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$$

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép

b) Với $m=0$ phương trình trở thành phương trình bậc nhất $x+1=0$ suy ra $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m\neq 0$ phương trình trên là phương trình bậc hai nên nó có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1-4m\ \ m+1\ \ >0 \Leftrightarrow 4m^2-4m+1>0 \Leftrightarrow \ \ 2m-1\ ^2>0 \Leftrightarrow m\neq \dfrac{1}{2}$$

Vậy $m\neq 0$ và $m\neq \dfrac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

3. Bài tập luyện tập

Bài 3.9: Tìm m để phương trình $x^2 - 3mx + (2m^2 - m - 1) = 0$ có nghiệm kép tìm nghiệm kép đó

Bài 3.10: Cho phương trình: $mx^2 - 2mx + m + 1 = 0$

a) Giải phương trình đã cho khi $m = -2$.

b) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm

Bài 3.11: Giải và biện luận phương trình

a) $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$ b) $(m-2)x^2 - (2m-1)x + m + 2 = 0$

Bài 3.12: Tùy thuộc vào giá trị của tham số m, hãy tìm hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: \ y = 2x + m$ và Parabol (P): $y = \ m-1 \ x^2 + 2mx + 3m - 1$.

➢ **DẠNG TOÁN 3: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT.**

Loại 1: Nhẩm nghiệm phương trình bậc hai, phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 1: Cho phương trình $2x^2 - mx + 5 = 0$. Biết phương trình có một nghiệm là 2. Tìm m và tìm nghiệm còn lại

Lời giải

Cách 1: Vì phương trình có nghiệm nên theo hệ thức Viét ta có $x_1x_2 = \frac{5}{2}$

Giả sử $x_1 = 2$ suy ra $x_2 = \frac{5}{4}$.

Mặt khác $x_1 + x_2 = \frac{m}{2} \Rightarrow 2 + \frac{5}{4} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = \frac{13}{2}$.

Vậy $m = \frac{13}{2}$ và nghiệm còn lại là $\frac{5}{2}$

Cách 2: Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $8 - 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{2}$.

Theo hệ thức Viét ta có $x_1x_2 = \frac{5}{2}$ mà $x_1 = 2$ nên $x_2 = \frac{5}{4}$.

Vậy $m = \frac{13}{2}$ và nghiệm còn lại là $\frac{5}{2}$.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x) = 3x^2 - 14x + 8$ b) $g(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $P(x;y) = 6x^2 - 11xy + 3y^2$. d) $Q(x;y) = 2x^2 - 2y^2 - 3xy + x - 2y$.

Lời giải

a) Phương trình $3x^2 - 14x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = 4 \end{array}\right.$

Suy ra $f(x) = 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right) \ x - 4 \ = \ 3x - 2 \ \ x - 4$

b) Phương trình $-x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow - \ x^2 \ ^2 + 5x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right.$

Suy ra $g(x) = - \ x^2 - 1 \ \ x^2 - 4 \ = - \ x - 1 \ \ x + 1 \ \ x - 2 \ \ x + 2$

c) Xét phương trình $6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0$ ẩn x .

$\Delta_x = \ 11y \ ^2 - 4.18y^2 = 49y^2$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{11y \pm 7y}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y}{3} \\ x = \dfrac{3y}{2} \end{array}\right.$

Do đó $P(x;y) = 6\left(x - \dfrac{y}{3}\right)\left(x - \dfrac{3y}{2}\right) = \ 3x - y \ \ 2x - 3y$

d) Xét phương trình $2x^2 - 2y^2 - 3xy + x - 2y = 0$(ẩn x)

$\Leftrightarrow 2x^2 + \ 1 - 3y \ x - 2y^2 - 2y = 0$

$\Delta_x = \ 1 - 3y \ ^2 - 8 \ -2y^2 - 2y \ = 25y^2 + 10y + 1 = \ 5y + 1 \ ^2$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{3y-1\pm(5y+1)}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\ x=\dfrac{-y-1}{2}\end{array}\right.$

Do đó $Q(x;y)=2(x-2y)\left(x-\dfrac{-y-1}{2}\right)=(x-2y)(2x+y+1)$

Ví dụ 3: Phân tích đa thức $f(x)=x^4-2mx^2-x+m^2-m$ thành tích của hai tam thức bậc hai ẩn x.

Lời giải

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow x^4-2mx^2-x+m^2-m=0$

$\Leftrightarrow m^2-(2x^2+1)m+x^4-x=0$

$\Delta_m=(2x^2+1)^2-4(x^4-x)=4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

Suy ra $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{2x^2+1+2x+1}{2}=x^2+x+1\\ m=\dfrac{2x^2+1-2x-1}{2}=x^2-x\end{array}\right.$

Vậy $f(x)=(m-x^2-x-1)(m-x^2+x)$.

Loại 2: Bài toán liên quan đến biểu thức đối xứng hai nghiệm x_1,x_2 của phương trình bậc hai.

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;\ x_2$ sao cho

a) $x_1^3+x_2^3=2x_1x_2(x_1+x_2)$

b) $\left|x_1^4-x_2^4\right|=16m^2+64m$

c) $A=x_1x_2-2(x_1+x_2)-6$ đạt giá trị nhỏ nhất

d) $B=\sqrt{2(x_1^2+x_2^2)+16}-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

Ta có phương trình có hai nghiệm $x_1;\ x_2\Leftrightarrow\Delta'\geq 0$

$\Leftrightarrow(m+1)^2-(m^2+2)\geq 0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{1}{2}$ (*)

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1.x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$

a) Ta có $x_1^3 + x_2^3 = \ x_1 + x_2\ ^3 - 3x_1x_2\ \ x_1 + x_2$

Suy ra $x_1^3 + x_2^3 = 2x_1x_2\ \ x_1 + x_2 \ \Leftrightarrow\ \ x_1 + x_2\ ^3 - 3x_1x_2\ \ x_1 + x_2\ = 2x_1x_2\ \ x_1 + x_2$

$\Leftrightarrow\ \ x_1 + x_2\ \left[\ x_1 + x_2\ ^2 - 5x_1x_2\right] = 0$

Suy ra $\ 2m + 2\ \left[\ 2m + 2\ ^2 - 5\ \ m^2 + 2\ \right] = 0 \Leftrightarrow 2\ \ m + 1\ \ \ -m^2 + 8m - 6\ \ = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m + 1 = 0 \\ -m^2 + 8m - 6 = 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m = -1 \\ m = 4 \pm \sqrt{10} \end{matrix}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có $m = 4 \pm \sqrt{10}$ thỏa mãn

Vậy $m = 4 \pm \sqrt{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có $\left|x_1^4 - x_2^4\right| = \left|\ x_1^2 + x_2^2\ \ \ x_1^2 - x_2^2\ \right| = \left[\ x_1 + x_2\ ^2 - 2x_1x_2\right]\left|x_1 - x_2\right|\left|x_1 + x_2\right|$

Mà

$\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{\ x_1 - x_2\ ^2} = \sqrt{\ x_1 + x_2\ ^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\ 2m + 2\ ^2 - 4\ \ m^2 + 2\ } = \sqrt{8m - 4}$

Suy ra

$\left|x_1^4 - x_2^4\right| = \left[\ 2m + 2\ ^2 - 2\ \ m^2 + 2\ \right]\sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right|$

$=\ \ 2m^2 + 8m\ \ \sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right|$

Suy ra $\left|x_1^4 - x_2^4\right| = 16m^2 + 64m \Leftrightarrow\ \ 2m^2 + 8m\ \ \sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right| = 16m^2 + 64m$

$\Leftrightarrow\ \ m^2 + 4m\ \ \ \sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right| - 8\ \ = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m^2 + 4m = 0\ (1) \\ \sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right| = 8\ (2) \end{matrix}\right.$

Ta có $\ 1\ \ \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m = 0 \\ m = -4 \end{matrix}\right.$ (loại)

$\ 2\ \ \Leftrightarrow\ \ 8m - 4\ \ \ 2m + 2\ ^2 = 64 \Leftrightarrow 32m^3 + 48m^2 - 80 = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$(thỏa mãn (*))

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta có $A = x_1x_2 - 2\ \ x_1 + x_2\ \ - 6 = m^2 + 2 - 2\ \ 2m + 2\ \ - 6 = m^2 - 4m - 8$

$\Rightarrow A = (m-2)^2 - 12 \geq -12$

Suy ra $\min A = -12 \Leftrightarrow m = 2$, $m = 2$ thỏa mãn (*)

Vậy với $m = 2$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

d) $B = \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2) + 16} - 3x_1x_2 = \sqrt{2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] + 16} - 3x_1x_2$

$= \sqrt{2(2m+2)^2 - 4(m^2+2) + 16} - 3(m^2+2) = \sqrt{4m^2 + 16m + 16} - 3(m^2+2)$

$= 2m + 4 - 3(m^2+2) = -3m^2 + 2m - 2$

Xét hàm số $y = -3m^2 + 2m - 2$ với $m \geq \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\frac{7}{4}$	$-\infty$

Suy ra giá trị $\max\limits_{m \geq \frac{1}{2}} y = -\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức B là $-\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

c) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$

Lời giải

a) Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$ nên phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m

b) Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = m - 1$

Suy ra hệ thức liên hệ giữa $x_1,\ x_2$ không phụ thuộc vào m là $x_1x_2 = x_1 + x_2 - 1$

c) Ta có $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2m + 2$.

Suy ra $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \dfrac{2m+1}{m^2+2}$

Vì $A - 1 = \dfrac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \dfrac{2m+1-m^2-2}{m^2+2} = -\dfrac{\left(m-1\right)^2}{m^2+2} \le 0, \forall m \Rightarrow A \le 1, \forall m$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$

Và $A + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2m+1}{m^2+2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\left(2m+1\right) + m^2 + 2}{2\left(m^2+2\right)} = \dfrac{\left(m+2\right)^2}{2\left(m^2+2\right)} \ge 0,\ \forall m \Rightarrow A \ge -\dfrac{1}{2},\ \forall m$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -2$

Vậy $\max A = 1$ khi và chỉ khi $m = 1$, $\min A = -\dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $m = -2$

Chú ý: Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{2m+1}{m^2+2}$ ta làm như sau

Xét $A - k = \dfrac{-km^2 + 2m - 2k^2 + 1}{m^2+2}$. Khi đó để biểu thức đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thì tử số là biểu thức $f\left(m\right) = -km^2 + 2m - 2k^2 + 1$ phải biểu diễn được dưới dạng bình phương hay

$\Delta_m = 0 \Leftrightarrow 1 + k\left(1 - 2k\right) = 0 \Leftrightarrow -2k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Vì vậy ta mới đi xét như trên.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.13: Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ b) $g(x) = 2x^4 - 14x^2 - 36$

c) $P(x;y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2$. d) $Q(x;y) = x^2 - 2y^2 - xy - 3y - 1$.

Bài 3.14: Phân tích đa thức $f\left(x\right) = 2x^3 + \left(m+1\right)x^2 + 2mx + m^2 + m$ (biến x với tham số m) thành tích một đã thức bậc hai và một bậc nhất.

Bài 3.15: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $-x^2 + 3x + 1 = 0$. Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = x_1^2 + x_2^2;\ B = x_1^3\ \ x_1 - 1\ \ + x_2^3\ \ x_2 - 1\ \ ;\ C = \left|\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right|.$$

Bài 3.16: Tìm m để phương trình $3x^2 + 4\ \ m - 1\ \ x + m^2 - 4m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}\ \ x_1 + x_2\ \ $.

Bài 3.17: Cho phương trình $x^2 - 2\ \ m - 1\ \ x + m^2 - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;\ x_2$ sao cho

a) $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

b) $A = 2\ \ x_1^2 + x_2^2\ \ - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

c) $B = \dfrac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

➢ **DẠNG TOÁN 4: Một số bài toán liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai.**

1. Phương pháp giải và các ví dụ minh họa.

- **Bài toán 1:** Tìm điều kiện để hai phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a^/x^2 + b^/x + c^/ = 0$ có nghiệm chung. Chúng ta làm như sau:

Bước 1: Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là x_0 thì $\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ a^/x_0^2 + b^/x_0 + c^/ = 0 \end{cases}$

Giải hệ tìm được x_0,suy ra giá trị của tham số

Bước 2: Thế giá trị của tham số tìm được vào hai phương trình để kiểm tra và kết luận.

Ví dụ 1:Tìm tất cả các giá trị của a để hai phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 + x + a = 0$ có nghiệm chung

Lời giải:

Điều kiện cần: Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow\ \ a - 1\ \ x_0 + 1 - a = 0$$

Nếu $a = 1$ thay vào hai phương trình ta thấy chúng vô nghiệm

Nếu $a \ne 1$ thì $x_0 = 1 \Rightarrow a = -2$

Điều kiện đủ: Với $a = -2$ thì hai phương trình trở thành $x^2 - 2x + 1 = 0$ và $x^2 + x - 2 = 0$

Giải hai pt này ta thấy chúng có nghiệm chung là $x = 1$
Vậy $a = -2$ là giá trị cần tìm
Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $(x^2 - 2mx + m - 1)(x^2 - 3x + 2m) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt
Lời giải:

Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2mx + m - 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 3x + 2m = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Phương trình đầu có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai phương trình (1) và (2) mỗi phương trình phải có hai nghiệm phân biệt và chúng không có nghiệm chung.

* Ta có $\Delta'_1 = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m$ nên phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

Do đó điều kiện để cả hai phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt là

$\Delta_2 = 9 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{8}$.

* Giả sử hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung là x_0 thì

$\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + m - 1 = 0 \\ x_0^2 - 3x_0 + 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 - (3x_0 - x_0^2).x_0 + \frac{3x_0 - x_0^2}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x_0^3 - 5x_0^2 + 3x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow m = 1$

Với $m = 1$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$, phương trình (2) trở thành

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ do đó $m = 1$ thì hai phương trình có nghiệm chung.

Suy ra để khi hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung là $m \neq 1$.

Vậy để phương trình đầu có bốn nghiệm phân biệt thì $m < \frac{9}{8}$ và $m \neq 1$.

- **Bài toán 2: Chứng minh trong các phương trình bậc hai có ít nhất một phương trình có nghiệm**

Để giải quyết bài toán này chúng ta sẽ đi chứng minh tổng các biệt thức Delta là một số không âm.
Ví dụ 3: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn diệu kiện $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$4x^2 - 4(2a + 1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$$
$$4x^2 - 4(2b + 1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0$$

Lời giải

Hai phương trình trên lần lượt có $\Delta_1' = 16a(1-48bc)$,$\Delta_2' = 16b(1-24ac)$

Vì a,b là các số dương nên Δ_1',Δ_2' lần lượt cùng dấu với $1-48bc$ và $1-24ac$

Mặt khác ta lại có $1-48bc+1-24ac = 2-24c(a+2b) = 2-24c(1-3c) = 2(6c-1)^2 \geq 0$

Dẫn đến $\Delta_1' + \Delta_2' \geq 0$

Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Ví dụ 4: Cho các số a,b,c thỏa mãn điệu kiện $a+b+c=6$.Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm

$$x^2+ax+1=0$$
$$x^2+bx+1=0$$
$$x^2+cx+1=0$$

Lời giải

Ba pt trên lần lượt có $\Delta_1 = a^2-4,\ \Delta_2 = b^2-4$, $\Delta_3 = c^2-4$

$\Rightarrow \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 = a^2+b^2+c^2-12$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau $b^2+c^2 \geq \dfrac{(b+c)^2}{2}$

Suy ra $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 \geq a^2+\dfrac{(b+c)^2}{2}-12 = a^2+\dfrac{(6-a)^2}{2}-12$

Mặt khác $a^2+\dfrac{(6-a)^2}{2}-12 = \dfrac{3(a-2)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 \geq 0$

Do đó có ít nhất một trong ba biệt thức $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ không âm

Vậy với a,b,c thỏa mãn điệu kiện $a+b+c=6$ thì có ít nhất một trong ba phương trình có nghiệm

- **Bài toán 3: Chứng minh bất đẳng thức có chứa các hệ số của phương trình bậc hai với nghiệm của nó có điều kiện.**

Để làm xuất hiện điều kiện ràng buộc đối với hệ số phương trình bậc hai ta thường dựa trên

+ Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thực thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4ac$.

+ Sử dụng định lí Viét và điều kiện nghiệm của đề bài đã cho để suy ra ràng buộc của hệ số a,b,c .

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2-bx+c=0$ có hai nghiệm thực dương x_1,x_2 thoả mãn $x_1+x_2 \leq 1$. Chứng minh rằng:

a) $c \le \frac{1}{4}$.

b) $b(c+1) \ge 5c$.

Chứng minh.

a) Ta có $c = x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$.

c) Thay $b = x_1 + x_2, c = x_1x_2$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$(x_1+x_2)(x_1x_2+1) \ge 5x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1 + x_2 \ge 5$

Ta c ó: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{4x_1} + x_2 + \frac{1}{4x_2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \ge 1 + 1 + \frac{3}{4}\frac{4}{x_1+x_2} \ge 5$.

Ví dụ 6: Cho phương trình $x^2 - bx + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 \ge 1$.

a) Chứng minh rằng: $b^2 - 2c \ge \frac{1}{2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2bc - b^3 - 3b + 1$.

Lời giải.

a) Thay $b = x_1 + x_2, c = x_1x_2$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$x_1 + x_2 \;\; ^2 - 2x_1x_2 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \ge \frac{1}{2}$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 \ge \frac{1}{2} \;\; x_1 + x_2 \;\; ^2 \ge \frac{1}{2}$.

b) Theo giả thiết ta có: $b \ge 1, c \le \frac{b^2}{4}$ nên $P \le -\frac{b^3}{2} - 3b + 1 \le -\frac{1}{2} - 3 + 1 = -\frac{5}{2}$.

Vậy $P_{MAX} = -\frac{5}{2}$ khi $b = 1, c = \frac{1}{4}$.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 3.18: Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung $x^2 - 2mx - 4m + 1 = 0$ (1) và $x^2 + \ 3m + 1 \ x + 2m + 1 = 0$ (2).

Bài 3.19: Chứng minh rằng nếu hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + mx + n = 0$ có nghiệm chung thì $\ n - b \ ^2 = \ m - a \ \ an - bm \ $.

Bài 3.20: Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng trong ba phương trình sau có ít nhất một phương trình có nghiệm $ax^2 + 2bx + c = 0$ (1); $bx^2 + 2cx + a = 0$ (2); $cx^2 + 2bx + b = 0$ (3).

Bài 3.21: Cho phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1 x_2 \geq 1$.

a) Chứng minh rằng: $b^2 \geq 4$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{3b^2 - 4c + b + 2}{b^2 + 1}$.

Bài 3.22: Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0;3]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \dfrac{18a^2 - 9ab + b^2}{9a^2 - 3ab + ac}$

Bài 3.23: Cho phương trình bậc hai $ax^2 - x + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^2 - c}{a^2 c - a^3}$.