§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

➢ DẠNG TOÁN 1: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Phương pháp giải.

- Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối(GTTĐ) ta tìm cách để khử dấu GTTĐ, bằng cách:

  – Dùng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ.
  – Bình phương hai vế.
  – Đặt ẩn phụ.

- Phương trình dạng $\left|f(x)\right| = \left|g(x)\right|$ ta có thể giải bằng cách biến đổi tương đương như sau

$\left|f(x)\right| = \left|g(x)\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$ hoặc $\left|f(x)\right| = \left|g(x)\right| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\left|2x+1\right| = \left|x^2-3x-4\right|$.

b) $\left|3x-2\right| = 3-2x$

c) $\left|x^2-4x-5\right| = 4x-17$

d) $\left|2x-5\right| + \left|2x^2-7x+5\right| = 0$

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 = x^2-3x-4 \\ 2x+1 = -\left(x^2-3x-4\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-5 = 0 \\ x^2-x-3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pm\sqrt{45}}{2} \\ x = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{5\pm\sqrt{45}}{2}$ và $\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

b) Cách 1: Với $3-2x < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$ ta có $VT \geq 0, VP < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm

Với $3-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$ khi đó hai vế của phương trình không âm suy ra

Phương trình $\Leftrightarrow \left|3x-2\right|^2 = \left(3-2x\right)^2 \Leftrightarrow 9x^2-12x+4 = 4x^2-12x+9$

$\Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 1$.

Cách 2: Với $3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3}$: Phương trình tương đương với

$3x-2 = 3-2x \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Với $3x-2<0 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$: Phương trình tương đương với

$-(3x-2)=3-2x \Leftrightarrow x=-1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 1$.

c) Với $4x-17<0 \Leftrightarrow x<\frac{17}{4}$ ta có $VT \geq 0, VP<0$ suy ra phương trình vô nghiệm

Với $4x-17 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{17}{4}$ khi đó hai vế của phương trình không âm suy ra

Phương trình $\Leftrightarrow |x^2-4x-5|^2=(4x-17)^2 \Leftrightarrow (x^2-4x-5)^2=(4x-17)^2$

$\Leftrightarrow (x^2-8x+12)(x^2-22)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+12=0 \\ x^2-22=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \end{array}\right. \\ x=\pm\sqrt{22} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq \frac{17}{4}$ thấy chỉ có $x=6$ và $x=\sqrt{22}$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm là $x=6$ và $x=\sqrt{22}$.

d) Ta có $|2x-5| \geq 0, |2x^2-7x+5| \geq 0$ suy ra

$|2x-5|+|2x^2-7x+5| \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x^2-7x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{5}{2}$.

Nhận xét: Đối với phương trình dạng $|f(x)|=g(x)$ (*) ta có thể biến đổi tương đương như sau

$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f^2(x)=g^2(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$

Hoặc $\left|f(x)\right| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^2 - 3|x+1| + 2 = 0$ b) $4x(x-1) = \left|2x-1\right| + 1$

c) $x^2 + \dfrac{9}{(x-1)^2} + 1 = 2x + 7\left|\dfrac{x^2-2x-2}{x-1}\right|$

Lời giải

a) Đặt $t = \left|x+1\right|, t \geq 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ ta có $\left|x+1\right| = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $t = 2$ ta có $\left|x+1\right| = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -3, x = -2, x = 0$ và $x = 1$

b) Phương trình tương đương với $4x^2 - 4x - |2x-1| - 1 = 0$

Đặt $t = \left|2x-1\right|,\ t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x = t^2 - 1$.

Phương trình trở thành $t^2 - 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t = 2$ nên $\left|2x-1\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3}{2}$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 1$

Phương trình tương đương $(x-1)^2 + \dfrac{9}{(x-1)^2} = 7\left|x - 1 - \dfrac{3}{x-1}\right|$

Đặt $t=\left|x-1-\dfrac{3}{x-1}\right|$

Suy ra $t^2=\left(x-1\right)^2+\dfrac{9}{\left(x-1\right)^2}-6\Rightarrow \left(x-1\right)^2+\dfrac{9}{\left(x-1\right)^2}=t^2+6$

Phương trình trở thành $t^2+6=7t\Leftrightarrow t^2-7t+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=6\end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có $\left|x-1-\dfrac{3}{x-1}\right|=1\Leftrightarrow \left|\dfrac{x^2-2x-2}{x-1}\right|=1\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-2}{x-1}=\pm 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-1=0\\ x^2-x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Với $t=6$ ta có $\left|x-1-\dfrac{3}{x-1}\right|=6\Leftrightarrow \left|\dfrac{x^2-2x-2}{x-1}\right|=6\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-2}{x-1}=\pm 6$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+4=0\\ x^2+4x-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\pm 2\sqrt{3}\\ x=-2\pm 2\sqrt{3}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, $x=4\pm 2\sqrt{3}$ và $x=-2\pm 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 3: Giải và biện luận các phương trình sau

a) $\left|mx+2m\right|=\left|mx+x+1\right|$ (*) b) $\left|mx+2x-1\right|=\left|x-1\right|$ (**)

Lời giải

a) Ta có $\left|mx+2m\right|=\left|mx+x+1\right|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx+2m=mx+x+1\\ mx+2m=-\left(mx+x+1\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2m-1\\ \left(2m+1\right)x=-2m-1\ (1)\end{array}\right.$

Giải (1)

Với $2m+1=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$ phương trình trở thành $0x=0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $2m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -\dfrac{1}{2}$ phương trình tương đương với $x=-1$

Kết luận

$m = -\dfrac{1}{2}$ phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x .

$m \neq -\dfrac{1}{2}$ phương trình (*) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2m - 1$

b) Ta có $\left|mx + 2x - 1\right| = \left|x - 1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2x - 1 = x - 1 \\ mx + 2x - 1 = -\ \ x - 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)x = 0 \quad (2) \\ (m+3)x = 2 \quad (3) \end{array}\right.$

Với phương trình (2) ta có

$m = -1$ thì phương trình (2) nghiệm đúng với mọi x

$m \neq -1$ thì phương trình (2) có nghiệm $x = 0$

Với phương trình (3) ta có

$m = -3$ thì phương trình (3) vô nghiệm

$m \neq -3$ thì phương trình (3) có nghiệm $x = \dfrac{2}{m+3}$

Kết luận

$m = -1$ phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x

$m = -3$ phương trình (*) có nghiệm $x = 0$

$m \neq -1$ và $m \neq -3$ phương trình (*) có nghiệm $x = 0$ và $x = \dfrac{2}{m+3}$.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $\left|x^2 + x\right| = \left|mx^2 - (m+1)x - 2m - 1\right|$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình tương đương với

$\left|x\ \ x+1\ \right| = \left|\ x+1\ \ mx - 2m - 1\ \right| \Leftrightarrow \left|x+1\right|\left[\left|x\right| - \left|mx - 2m - 1\right|\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \left|x\right| = \left|mx - 2m - 1\right| \ (*) \end{array}\right.$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx - 2m - 1 = x \\ mx - 2m - 1 = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-1)x = 1 + 2m \ \ (1) \\ (m+1)x = 1 + 2m \ \ (2) \end{array}\right.$

Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm khi đó phương trình ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt.

Nếu $m = -1$ thì phương trình (2) vô nghiệm khi đó phương trình ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt.

Nếu $m\ne \pm 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+2m}{m-1} \\ x=\dfrac{1+2m}{m+1} \end{array} \right.$

Suy ra để phương trình ban đầu có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1+2m}{m-1}\ne -1 \\ \dfrac{1+2m}{m+1}\ne -1 \\ \dfrac{1+2m}{m-1}\ne \dfrac{1+2m}{m+1} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m\ne 0 \\ m\ne -\dfrac{2}{3} \\ m\ne -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Vậy với $m\notin \left\{ -1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{2}{3};0;1 \right\}$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.24: Giải các phương trình sau

a) $|3x-2|=x^2+2x+3$ b) $\left|x^3-1\right|=\left|x^2-3x+2\right|$

Bài 3.25: Giải các phương trình sau

a) $\left(2x-1\right)^2-3\left|2x-1\right|-4=0$ b) $\dfrac{x^4-6x^2+4}{x^2}=\left|\dfrac{x^2-2}{x}\right|$

Bài 3.26: Cho phương trình $x^2-2x-2\left|x-1\right|+m+3=0$

a) Giải phương trình khi $m=-2$

b) Tìm m để phương trình sau có nghiệm

Bài 3.27: Giải và biện luận các phương trình sau

a) $\left|mx+2m\right|=\left|x+1\right|$ b) $\left|mx+2x\right|=\left|mx-1\right|$

➢ DẠNG TOÁN 2: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

1. Phương pháp giải.

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu ta thường

- Quy đồng mẫu số (chú ý cần đặt điều kiện mẫu số khác không)
- Đặt ẩn phụ

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{2x+1}{3x+2}=\dfrac{x+1}{x-2}$　　b) $1+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{10}{x+3}-\dfrac{50}{(2-x)(x+3)}$.

c) $\dfrac{x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{4x-2}{(2x-1)^2}$.　　d) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2x+1}{x+1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\neq-\dfrac{2}{3}$ và $x\neq 2$.

Phương trình tương đương với

$(2x+1)(x-2)=(x+1)(3x+2)\Leftrightarrow 2x^2-4x+x-2=3x^2+2x+3x+2$

$\Leftrightarrow x^2+8x+4=0\Leftrightarrow x=-4\pm2\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-4\pm2\sqrt{3}$.

b) ĐKXĐ: $x\neq-3$ và $x\neq 2$.

Phương trình tương đương với $(2-x)(x+3)-2(x+3)=10(2-x)-50$

$\Leftrightarrow x^2-7x-30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=-3\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=10$.

c) ĐKXĐ: $x\neq-1$ và $x\neq\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tương đương với

$\dfrac{x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{2x-1}\Leftrightarrow (x+3)(2x-1)=2(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=5$.

d) ĐKXĐ: $x\neq\pm2$ và $x\neq-1$

Phương trình tương đương với

$(x+1)^2(x-2)+(x-1)(x+1)(x+2)=(2x+1)(x-2)(x+2)$

$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)(x-2)+(x^2-1)(x+2)=(2x+1)(x^2-4)$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2+2x^2-4x+x-2+x^3+2x^2-x-2=2x^3-8x+x^2-4$

$\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-4$ và $x=0$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{3}{2x+2}=\dfrac{2}{2x+3}+\dfrac{1}{2x+4}$.

b) $\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+11x+28}+\dfrac{1}{x^2+17x+70}=\dfrac{3}{4x-2}$

c) $1+\dfrac{4}{2-x^{2}}=\dfrac{5}{x^2}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\notin\left\{-2;-\dfrac{3}{2};-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$

Phương trình tương đương với

$$\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{2x+3}=\frac{1}{2x+4}-\frac{3}{2x+2}\Leftrightarrow\frac{4x+10}{4x^2+8x+3}=\frac{-4x-10}{4x^2+12x+8}$$

$$\Leftrightarrow(4x+10)\left(\frac{1}{4x^2+8x+3}+\frac{1}{4x^2+12x+8}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(4x+10)\left(4x^2+8x+3+4x^2+12x+8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(4x+10)\left(8x^2+20x+11\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+10=0\\8x^2+20x+11=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{5}{2}\\x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{4}$ và $x=-\dfrac{5}{2}$

b) Điều kiện: $x\notin\left\{-10;-7;-4;-1;\dfrac{1}{2}\right\}$

Phương trình tương đương với

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+10)}=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}\Leftrightarrow x^2+7x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-4\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3$.
c) ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq 2$.

Phương trình tương đương với $x^2 + \frac{4x^2}{(2-x)^2} = 5$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4x^2}{2-x} + \frac{4x^2}{(2-x)^2} + \frac{4x^2}{2-x} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2x}{2-x}\right)^2 + \frac{4x^2}{2-x} - 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2-x}\right)^2 + \frac{4x^2}{2-x} - 5 = 0$

Đặt $t = \frac{x^2}{2-x}$, phương trình trở thành

$t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -5 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ ta có $\frac{x^2}{2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Với $t = -5$ ta có $\frac{x^2}{2-x} = -5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 10 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $\frac{x-m}{x+1} = 2$ (1)

b) $\frac{x^2 + mx + 2}{x^2 - 1} = 1$ (2)

c) $\frac{x^2 + mx + 2}{3 - x} = 2m + 6$ (3)

d) $\frac{|3x + mx + 2|}{|x+1|} = m$ (4)

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq -1$

Phương trình tương đương với $x - m = 2(x+1)$

$\Leftrightarrow x = -m - 2$

Đối chiếu với điều kiện ta xét $-m - 2 \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -1$

Kết luận

$m \neq -1$ phương trình (1) có nghiệm là $x = -m - 2$

$m = -1$ phương trình (1) vô nghiệm

b) ĐKXĐ: $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2 + mx + 2 = x^2 - 1$
$\Leftrightarrow mx = -3$ (2')
Với $m = 0$: Phương trình (2') trở thành $0x = -3$ suy ra phương trình (2') vô nghiệm do đó phương trình (2) vô nghiệm

Với $m \neq 0$ phương trình (2') tương đương với $x = \dfrac{-3}{m}$

Đối chiếu điều kiện xét $\dfrac{-3}{m} \neq \pm 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ suy ra $m \neq \pm 3$ thì phương trình (2') có nghiệm

$x = \dfrac{-3}{m}$ và là nghiệm của phương trình (2). Còn $m = 3$ thì phương trình (2') có nghiệm là $x = -1$,
$m = -3$ thì phương trình (2') có nghiệm là $x = 1$do đó phương trình (2) vô nghiệm.
Kết luận
$m \in \ -3;0;3$ phương trình (2) vô nghiệm

$m \notin \ -3;0;3$ phương trình (2) có nghiệm $x = \dfrac{-3}{m}$

c) ĐKXĐ: $x \neq 3$
Phương trình (3) $\Leftrightarrow x^2 + mx + 2 = \ 3 - x \ \ 2m + 6$

$\Leftrightarrow x^2 + \ 3m + 4 \ x - 6m - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \ x - 2 \ \ x + 3m + 8 \ = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3m - 8 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta xét $-3m - 8 \neq 3 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{5}{3}$

Kết luận

$m = -\dfrac{5}{3}$ phương trình (3) có nghiệm là $x = -2$

$m \neq -\dfrac{5}{3}$ phương trình có nghiệm là $x = 2$ và $x = -3m - 8$
d) ĐKXĐ: $x \neq -1$
TH1: Nếu $m < 0$ ta có $VP(4) \geq 0, VT(4) < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm

TH2: Nếu $m \geq 0$ phương trình tương đương với

$|3x + mx + 2| = m|x + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + mx + 2 = m \ \ x + 1 \\ 3x + mx + 2 = -m \ \ x + 1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m-2}{3} \\ 2m+3 \;\; x = -m-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m-1}{2} \\ x = \dfrac{-m-2}{2m+3} \end{array}\right.$$

- Với $x = \dfrac{m-1}{2}$ ta xét $\dfrac{m-1}{2} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -1$(luôn đúng) do đó với $m \geq 0$ thì phương trình (4) luôn nhận $x = \dfrac{m-1}{2}$ là nghiệm
- Với $x = \dfrac{-m-2}{2m+3}$ ta xét $\dfrac{-m-2}{2m+3} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -1$ (luôn đúng) do đó với $m \geq 0$ thì phương trình (4) luôn nhận $x = \dfrac{-m-2}{2m+3}$ là nghiệm

Kết luận
$m < 0$ phương trình (4) vô nghiệm
$m \geq 0$ phương trình (4) có hai nghiệm $x = \dfrac{m-1}{2}$ và $x = \dfrac{-m-2}{2m+3}$

Ví dụ 4: Tìm điều kiện của tham số a và b để phương trình
$\dfrac{a}{x-a} - \dfrac{b}{x-b} = \dfrac{a^2-b^2}{x^2 - \;\; a+b \;\; x+ab}$ (*)

a) Có nghiệm duy nhất
b) Có nghiệm

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq a$ và $x \neq b$

Phương trình tương đương với $\dfrac{a \;\; x-b \;\; - b \;\; x-a}{x-a \quad x-b} = \dfrac{a^2-b^2}{x^2 - \;\; a+b \;\; x+ab}$

$\Leftrightarrow \;\; a-b \;\; x = a^2 - b^2$ (**)

a) Phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm duy nhất khác a và b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b \neq 0 \\ \dfrac{a^2-b^2}{a-b} \neq a \\ \dfrac{a^2-b^2}{a-b} \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a+b \neq a \\ a+b \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi $\begin{cases} a \neq b \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

b) Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm khác a và b
Với $a = b$ thì phương trình (**) trở thành $0x = 0$ suy ra phương trình (**) có nghiệm đúng với mọi x do đó phương trình (*) có nghiệm.

Với $a \neq b$ thì phương trình (**) tương đương với $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a + b \neq a \\ a + b \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Vậy phương trình (*) có nghiệm khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a \neq b \end{cases}$ hoặc $a = b$.

3. Bài tập luyện tập.
Bài 3.28: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{13}{2x^2 + x - 21} + \dfrac{1}{2x + 7} = \dfrac{6}{x^2 - 9}$

b) $\dfrac{4}{2x^3 + 3x^2 - 8x - 12} + \dfrac{1}{2x + 3} = \dfrac{1}{x^2 - 4} + \dfrac{4}{2x^2 + 7x + 6}$

c) $\dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{x - 2}{x + 2} + \dfrac{x - 3}{x + 3} + \dfrac{x + 4}{x - 4} = 4$

Bài 3.29: Giải phương trình

a) $\dfrac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \dfrac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6$ b) $\dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^3 + x^2 - x} = 3$

c) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x + 1)^2} = 15$

Bài 3.30: Giải phương trình

a) $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2 + \dfrac{x+1}{x-3} = 12\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^2$ b) $\dfrac{2(x+1)}{3x^2 + x} + \dfrac{13(x+1)}{3x^2 + 7x + 6} = 6$

Bài 3.31: Giải và biện luận phương trình sau $\dfrac{ax - 1}{x - 1} + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{a\ \ x^2 + 1}{x^2 - 1}$

Bài 3.32: Tìm điều kiện a,b để phương trình $\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2$ có hai nghiệm phân biệt.

- **DẠNG TOÁN 3: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG CĂN BẬC HAI.**

1. Phương pháp giải.

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta tìm cách để khử dấu căn, bằng cách:

– Nâng luỹ thừa hai vế.

– Phân tích thành tích.

– Đặt ẩn phụ.

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Bình phương hai vế của phương trình.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$ b) $x-\sqrt{2x-5}=4$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2+2x+4\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\le 2$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$$x^2+2x+4=2-x \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=-1$ và $x=-2$.

b) ĐKXĐ: $2x-5\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{5}{2}$.

$x-\sqrt{2x-5}=4 \Leftrightarrow \sqrt{2x-5}=x-4$ (*)

TH1: Với $x-4<0 \Leftrightarrow x<4$ ta có $VT(*)\ge 0, VP(*)<0$ suy ra phương trình vô nghiệm

TH2: Với $x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 4$ ta có hai vế không âm nên phương trình (*) tường đương với

$$2x-5=\left(x-4\right)^2 \Leftrightarrow x^2-10x+21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $x\ge 4$ và điều kiện xác định suy ra chỉ có $x=7$ là nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=7$.

Nhận xét: Từ các lời giải các bài toán trên ta suy ra đối với các dạng phương trình sau ta có thể giải bằng cách thực hiện phép biến đổi tương đương:

- $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \ (hay\ \ g(x)\ge 0) \end{cases}$

- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \left(g(x) \right)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $x = \sqrt{\sqrt{3x^2+1}-1}$ b) $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \sqrt{3x^2+1}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{3x^2+1} = x^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2+1 = (x^2+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2\left(x^2-1 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$

b) Ta có $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = \left(-x^2+3x-1 \right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2(x^2-4x+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2-4x+2 = 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2-\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = 2-\sqrt{2}$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2+mx+2} = 2x+1$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2 + (4-m)x - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = 3x^2 + (4-m)x - 1$ trên $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty \right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Xét hàm số $y=3x^2+(4-m)x-1$ trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có $-\frac{b}{2a}=\frac{m-4}{6}$

+ TH1: Nếu $\frac{m-4}{6}\le-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m\le 1$ thì hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên $m\le 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: Nếu $\frac{m-4}{6}>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m>1$:

Ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{m-4}{6}$		$+\infty$
y	$y\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$y\left(\frac{m-4}{6}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=3x^2+(4-m)x-1$ trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow y\left(-\frac{1}{2}\right)\ge 0>y\left(\frac{m-4}{6}\right)\Leftrightarrow\frac{2m-9}{4}\ge 0>\frac{1}{12}\left(-m^2+8m-28\right)\quad(1)$$

Vì $-m^2+8m-28=-\left(m-4\right)^2-12<0,\ \forall m$ nên

$(1)\Leftrightarrow 2m-9\ge 0\Leftrightarrow m\ge\frac{9}{2}$ (thỏa mãn $m>1$)

Vậy $m\ge\frac{9}{2}$ là giá trị cần tìm.

Loại 2: Phân tích thành tích bằng cách nhân liên hợp.

Để trục căn thức ta nhân với các đại lượng liên hợp;

$$\bullet\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$\bullet\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}=\frac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$$

Với A, B không đồng thời bằng không.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{2(x-1)^2}{\left(3-\sqrt{7+2x}\right)^2}=x+20$ b) $\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{x}=2$

c) $3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2+8}=\sqrt{x^2+15}+2$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}7+2x\geq 0\\ 3\neq\sqrt{7+2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -\dfrac{7}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{2(x-1)^2\left(3+\sqrt{7+2x}\right)^2}{\left(3-\sqrt{7+2x}\right)^2\left(3+\sqrt{7+2x}\right)^2}=x+20$

$\Leftrightarrow\dfrac{2(x-1)^2\left(10+2x+6\sqrt{7+2x}\right)}{(2-2x)^2}=x+20$

$\Leftrightarrow 10+2x+6\sqrt{7+2x}=2(x+20)$

$\Leftrightarrow\sqrt{7+2x}=5\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có ngjiệm $x=9$

b) ĐKXĐ: $x\geq\dfrac{2}{3}$

Nhẩm ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình nên ta tách như sau

Phương trình $\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x-2}-1\right)+\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{3x-2}-1\right)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x-3}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=0\Leftrightarrow(x-1)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)=0\ (*)$

Do $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1=\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ nên $\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}>0$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow x=1$(thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

c) Phương trình được viết lại như sau: $3\sqrt[3]{x}-2=\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}$

Vì $\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}>0$ nên phương trình có nghiệm thì phải thỏa mãn $3\sqrt[3]{x}-2$ hay $x>\frac{8}{27}$

Ta có phương trình tương đương với:

$3\sqrt[3]{x}-3=\sqrt{x^2+15}-4+3-\sqrt{x^2+8}$

$\Leftrightarrow 3\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}$

$\Leftrightarrow (x-1)(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4})=0$ (**)

Vì $x>\dfrac{8}{27}$ suy ra $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}>0$ nên

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}>0$

Phương trình (**) $\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau

a) $(x+3)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3$ b) $(3x+1)\sqrt{x^2+3}=3x^2+2x+3$

Lời giải

a) Ta thấy $x=-3$ không là nghiệm của phương trình

Xét $x\neq -3$, phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=\dfrac{x^2+x+3}{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}-1=\dfrac{x^2}{x+3}\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\dfrac{x^2}{x+3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2\ x+3=\sqrt{2x^2+1}+1 \ (*)\end{array}\right.$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=2x+5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{2} \\ 2x^2+1=4x^2+25+20x \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{2} \\ x^2+10x+12=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{2} \\ x=-5\pm\sqrt{13} \end{cases}\Leftrightarrow x=5+\sqrt{13}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$ và $x = -5 + \sqrt{13}$

b) Ta thấy $x = -\frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình

Xét $x \neq -\frac{1}{3}$, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = \frac{3x^2+2x+3}{3x+1}$

Đến đây, chú ý $3x^2+2x+3 = 3(x+\frac{1}{3})^2 + \frac{8}{3} > 0$

Nên phương trình có nghiệm phải thỏa mãn $x > -\frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x^2+3} + 2x > 0$

Do đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - 2x = \frac{3x^2+2x+3}{3x+1} - 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3-4x^2}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \frac{3x^2+2x+3-6x^2-2x}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-x^2)}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \frac{3(1-x^2)}{3x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ \sqrt{x^2+3}+2x = 3x+1 \end{array}\right.$$

* TH1: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Nhưng $x = -1$ không thoả mãn $x > -\frac{1}{3}$ nên phương trình có nghiệm $x = 1$

* TH2: $\sqrt{x^2+3} + 2x = 3x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3 = x^2+1+2x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Loại 3: Đặt ẩn phụ

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$ b) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$ c) $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} = 3\sqrt{x}$

Lời giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^2+11},\ t \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = -7 \end{array}\right.$$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t = 6$, thay vào ta có $\sqrt{x^2+11} = 6$

$x^2 + 11 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 5$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 5$

b) Phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} - 10 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}, \quad t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -5 \end{array}\right..$$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t = 2$, thay vào ta có $\sqrt{x^2 + 3x} = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = -4$.

c) ĐKXĐ: $x \geq 0$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Xét $x > 0$, phương trình $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 3\sqrt{x}.\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x + 1 + \dfrac{1}{x} = 3\sqrt{x - 1 + \dfrac{1}{x}}$

Đặt $t = \sqrt{x - 1 + \dfrac{1}{x}}, t \geq 1 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = t^2 + 1$

Phương trình trở thành $t^2 + 2 = 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

- Với $t = 1$ ta có $\sqrt{x - 1 + \dfrac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)
- Với $t = 2$ ta có $\sqrt{x - 1 + \dfrac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ và $x = 1$.

Nhận xét: Phương trình có dạng $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0$ ta đặt $\sqrt{f(x)} = t$.

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x - 1} + 4x^2 - 6x + 1 = 0$

b) $\sqrt{3x^2 - 2x + 9} + \sqrt{3x^2 - 2x + 2} = 7$

c) $3\sqrt{x} + 8 = 9x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $\dfrac{2x^2 + 8x + 1}{2x + 1} = 5\sqrt{x}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{1}{4}$

Đặt $t=\sqrt{4x-1},\ t\ge 0 \Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{4}$

Phương trình trở thành $t+4\left(\dfrac{t^2+1}{4}\right)^2-6\dfrac{t^2+1}{4}+1=0$

$\Leftrightarrow 4t+t^4+2t^2+1-6\left(t^2+1\right)+4=0$

$\Leftrightarrow t^4-4t^2+4t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^3+t^2-3t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2\left(t^2+2t-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$ (loại $t=-1-\sqrt{2}$)

Với $t=1$ ta có $1=\sqrt{4x-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Với $t=-1+\sqrt{2}$ ta có $-1+\sqrt{2}=\sqrt{4x-1} \Leftrightarrow 4x-1=3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

b) Đặt $t=\sqrt{3x^2-2x+2}$, điều kiện $t\ge 0$. Khi đó $\sqrt{3x^2-2x+9}=\sqrt{t^2+7}$.

Phương trình trở thành $\sqrt{t^2+7}+t=7$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+7}=7-t \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 7 \\ t^2+7=t^2-14t+49 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\le 7 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow t=3$

Với $t=3$ ta có $\sqrt{3x^2-2x+2}=3$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x+2=9 \Leftrightarrow 3x^2-2x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{22}}{3} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{22}}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\dfrac{1\pm\sqrt{22}}{3}$.

c) ĐKXĐ: $x>0$.

Phương trình tương đương với

$3\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)+8=9(x+\dfrac{1}{9x})$.

Đặt $t=\sqrt{x}-\dfrac{1}{3\sqrt{x}} \Rightarrow t^2=x+\dfrac{1}{9x}-\dfrac{2}{3} \Rightarrow x+\dfrac{1}{9x}=t^2+\dfrac{2}{3}$

Phương trình trở thành:

$$3t+8=9\left(t^2+\dfrac{2}{3}\right) \Leftrightarrow 9t^2-3t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{3} \\ t=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Với $t=\dfrac{2}{3}$ ta có $\sqrt{x}-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3x-2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$

Với $t=-\dfrac{1}{3}$ ta có $\sqrt{x}-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3x+\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} \\ \sqrt{x}=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{18}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$ và $x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{18}$.

d) ĐK: $x \geq 0$.

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$. Khi đó phương trình tương đương với

$$10x\sqrt{x}+5\sqrt{x}=2x^2+1+8x \Leftrightarrow 5(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})=2(x+\dfrac{1}{4x})+4$$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2} \Rightarrow t \geq \sqrt{2}$

Suy ra $x+\dfrac{1}{4x}=t^2-1$. Phương trình trở thành:

$5t=2(t^2-1)+4 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow t=2$ (thỏa mãn) hoặc $t=\dfrac{1}{2}$ (loại)

Với $t=2$ ta có $x+\dfrac{1}{4x}=3 \Leftrightarrow 4x^2-12x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm 2\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

Nhận xét: Phương trình có chứa $af\left(x\right) \pm \dfrac{1}{bf\left(x\right)}$ và $a^2 f^2\left(x\right) + \dfrac{1}{b^2 f^2\left(x\right)}$ thì ta đặt ẩn phụ là $t = af\left(x\right) \pm \dfrac{1}{bf\left(x\right)}$

Ví dụ 8: Giải phương trình

a) $(x+1)^2 - 2\sqrt{2x(x^2+1)} = 0$

b) $10\sqrt{x^3+1} = 3(x^2+2)$

c) $4 + \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2-1} + 2\sqrt{x-1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $2x(x^2+1) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$

Đặt $\sqrt{2x} = a, \sqrt{x^2+1} = b;\ a \ge 0, b \ge 0$

Suy ra $a^2 + b^2 = 2x + x^2 + 1 = (x+1)^2$

Phương trình trở thành $a^2 + b^2 - 2ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$

Suy ra $\sqrt{2x} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$

b) ĐKXĐ: $x^3 + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$.

Phương trình $\Leftrightarrow 10\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 3(x^2+2)$

Đặt $\sqrt{x+1} = a,\ \sqrt{x^2-x+1} = b$, $a \ge 0,\ b \ge 0$

Suy ra $a^2 + b^2 = x^2 + 2$ khi đó

Phương trình trở thành

$10ab = 3(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3a-b)(a-3b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = b \\ a = 3b \end{array}\right.$

Với $3a = b$ ta có $3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 9(x+1) = x^2 - x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{33}$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $a = 3b$ ta có $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow x + 1 = 9(x^2-x+1)$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 5 \pm \sqrt{33}$.

c) ĐKXĐ: $\text{x} \geq 1$

Đặt $\sqrt{x+1} = a, \sqrt{x-1} = b;\ a \geq 0, b \geq 0$

Phương trình trở thành $4 + a = 3ab + 2b$

Mặt khác $a^2 + b^2 = 2$ suy ra $2\ \ a^2 + b^2\ \ + a = 3ab + 2b \Leftrightarrow\ \ a - 2b\ \ \ 2a + b + 1\ \ = 0$

$\Leftrightarrow a = 2b$ (do $2a + b + 1 > 0$)

Suy ra $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x + 1 = 4\ \ x - 1\ \ \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{5}{3}$.

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $\ 2x - 1\ ^2 + m = \sqrt{x^2 - x + 1}$ (1)

b) $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2 - 1}$ (2)

Lời giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$\Rightarrow t^2 = x^2 - x + 1 \Rightarrow\ \ 2\text{x} - 1\ ^2 = 4\text{x}^2 - 4\text{x} + 1 = 4t^2 - 3$

Vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$ nên $t \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Phương trình (1) trở thành $4t^2 - 3 + m = t \Leftrightarrow -4t^2 + t + 3 = m$ (1')

Xét hàm số $y = -4t^2 + t - 3$ với $t \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{8} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Bảng biến thiên

x	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
y	$\dfrac{-12+\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1') có nghiệm $t \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = -4t^2 + t - 3$ trên $[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty)$ cắt đường thẳng $y = m \Leftrightarrow m \leq \dfrac{-12+\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \dfrac{-12+\sqrt{3}}{2}$

b) ĐKXĐ: $x \geq 1$.

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+1}$ ta có

$2 \Leftrightarrow 3\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow -3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = m$

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \dfrac{2}{x+1}} \Rightarrow 0 \leq t < 1$

Phương trình (2) trở thành $-3t^2 + 2t = m$ (2')

Xét hàm số $y = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$, ta có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3}$, $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{3}$		1
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2') có nghiệm $t \in [0;1)$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$ cắt đường thẳng $y = m \Leftrightarrow -1 < m \leq \dfrac{1}{3}$

Vậy phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \leq \dfrac{1}{3}$

Lưu ý: Khi giải bài toán bằng cách đặt ẩn phụ , đối với loại toán không chứa tham số thì có thể không nêu điều kiện(hoặc điều kiện "lỏng") của ẩn phụ vì sau khi tìm được nghiệm ẩn phụ rồi chúng ta phải thay lại để giải. Nhưng với bài toán chứa tham số thì chúng ta ***cần phải*** nêu điều kiện "chặt" đối với ẩn phụ.

Loại 4: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Ví dụ 10: Giải phương trình $3\sqrt{x+3} = 3x^2 + 4x - 1$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq -3$

Phương trình $\Leftrightarrow -27\ \ x+3\ \ -3\sqrt{x+3}+3x^2+31x+80=0$

Đặt $t=\sqrt{x+3}\qquad t\geq 0$ phương trình trở thành $-27t^2-3t+3x^2+31x+80=0$

Có $\Delta_t =\ \ 18x+93\ ^2$ suy ra $t_1=\dfrac{-3x-16}{9}$,$t_2=\dfrac{x+5}{3}$

- $\sqrt{x+3}=\dfrac{-3x-16}{9}$ Vô nghiệm vì với $x\geq -3$ thì $\dfrac{-3x-16}{9}<0$
- $\sqrt{x+3}=\dfrac{x+5}{3}\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=1$ và $x=-2$

Nhận xét: Trong lời giải trên ta thấy khó nhất là biến đổi phương trình ban đầu thành $-27\ \ x+3\ \ -3\sqrt{x+3}+3x^2+31x+80=0$ để sau khi đặt ẩn phụ $t=\sqrt{x+3}$ thì phương trình ẩn t có $\Delta =\ \ 18x+93\ ^2$ (là bình phương của một nhị thức)

Nếu ta tách không hợp lý thì Δ không là bình phương của một nhị thức hoặc là một hằng số ,trong trường hợp đó việc giải phương trình theo hướng trên là không thể thực hiện được.

Vậy làm thế nào để tách được phương trình mà thỏa mãn các điều kiện trên và việc tách ra như thế có là duy nhất?.Để trả lời được câu hỏi này ta thực hiện theo các bước như sau:

B1: Viết (1) $\Leftrightarrow m\ \ x+3\ \ -3\sqrt{x+3}+3x^2+\ \ 4-m\ \ x-1-3m=0\qquad m\neq 0$

B2: Đặt $t=\sqrt{x+3}\qquad t\geq 0$ pt trở thành $mt^2-3t+3x^2+\ \ 4-m\ \ x-1-3m=0$

Có $\Delta_t=-12mx^2-4m\ \ 4-m\ \ x+12m^2+4m+9=f\ \ x$

B3: Tìm m sao cho $\begin{cases}-12m>0\\ \Delta_f^/=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-12m>0\\ \Delta_f^/=4m\ \ m+27\ \ \ m^2+m+1\ \ =0\end{cases}\Leftrightarrow m=-27$

Đến đây việc giải pt như đã trình bày ở trên

Ví dụ 11: Giải phương trình $\sqrt{60-24x-5x^2}=x^2+5x-10$

Lời giải

ĐKXĐ: $60-24x-5x^2\geq 0$

Đặt $t=\sqrt{60-24x-5x^2}\quad (t\geq 0)$ pt trở thành $\dfrac{1}{6}t^2+t-\dfrac{1}{6}x^2-x=0\Leftrightarrow t^2+6t-x^2-6x=0$

Phương trình ẩn t này có $\Delta^/ =\ \ x+3\ ^2$ nên ta tìm được $t_1=x,t_2=-x-6$

- $\sqrt{60-24x-5x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2+4x-10=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{14}$

• $\sqrt{60-24x-5x^2}=-x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-6\ge 0 \\ x^2+6x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3-\sqrt{13}$

Vậy pt ban đầu có hai nghiệm $x_1=-2-\sqrt{14}, x_2=-3-\sqrt{13}$

Ví dụ 12: Giải phương trình $x+3\sqrt{4-x\quad 12+x}=28-x$

Lời giải

ĐKXĐ: $-x^2-8x+48\ge 0$

$t=\sqrt{-x^2-8x+48}\quad (t\ge 0)$ phương trình trở thành

$\frac{-1}{2}t^2+\ x+3\ t+\frac{-1}{2}x^2-3x-4=0\qquad t\ge 0$

Phương trình bậc hai ẩn t có $\Delta_t=1$ từ đó có $t=x+2, t=x+4$

•$\sqrt{-x^2-8x+48}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2+6x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3+\sqrt{31}$

•$\sqrt{-x^2-8x+48}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4\ge 0 \\ x^2+8x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-4+4\sqrt{2}$

Vậy pt ban đầu có hai nghiệm $x_1=-3+\sqrt{31}, x_2=-4+4\sqrt{2}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.33: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x+1}=3x+1$

b) $\sqrt{x^3-x}=\sqrt{4x+4}$

c) $\sqrt{x^4+3x+1}=\sqrt{x^4-x^2-1}$

d) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

e) $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$

f) $x^2+\sqrt{x+7}=7$

Bài 3.34: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

b) $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$

c) $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$

d) $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$

Bài 3.35: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2+x+2}=x^2+x$

b) $\ 2x-1\ ^2=\sqrt{x^2-x+1}$

c) $13x+2(3x+2)\sqrt{x+3}+42=0$

d) $x^2-2x-22-\sqrt{-x^2+2x+24}=0$

e) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}=x-\dfrac{1}{2}$

f) $\sqrt{4x-1}+4x^2-6x+1=0$

g) $x^2 + 2x\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = 3x + 1$ h) $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$

Bài 3.36: Giải các phương trình sau

a) $4x^2 + 22 + \sqrt{3x - 2} = 21x$ b) $x\left(1 - 5\sqrt{x + 3}\right) = 3\left(x^2 - 4\right)$

c) $51\sqrt{x - 2} = 3x^2 - 58x + 110$ d) $x^2 + x\sqrt{3x - 1} + 2 = 6x$

Bài 3.37: Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 9} = \dfrac{2(x + 3)}{(x - 3)^2}$.

Bài 3.38: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2}$

- **DẠNG TOÁN 4: PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO.**

Loại 1: Đưa về phương trình tích.

1. Phương pháp giải

Để giải phương trình $f(x) = 0$ ta phân tích $f(x) = f_1(x).f_2(x)...f_n(x)$ khi đó

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ .... \\ f_n(x) = 0 \end{array}\right.$$

Để đưa về một phương trình tích ta thường dùng các cách sau:

- Sử dụng các hằng đẳng thức đưa về dạng $a^2 - b^2 = 0,\ a^3 - b^3 = 0,...$
- Nhẩm nghiệm rồi chia đa thức: Nếu $x = a$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì ta luôn có sự phân thích: $f(x) = (x - a)g(x)$.

* Để dự đoán nghiệm ta chú ý các kết quả sau:

Cho đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

+ Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước của a_0.

+ Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng không thì phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm bằng 1.

+ Nếu đa thức có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm bằng -1.

* Để phân tích $f(x)$ ta sử dụng lược đồ Hooc-ne như sau:

Nếu $f(x)$ có nghiệm là $x = x_0$ thì $f(x)$ chứa nhân tử $(x - x_0)$ tức là :

$f(x) = (x - x_0).g(x)$, trong đó $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$

Với hệ số b_i được xác định như sau:

Lược đồ Hoócne

	a_n	a_{n-1}	....	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a.a_n + a_{n-1}$	....	$b_1 = a.a_2 + a_1$	0

Ví dụ : Giải phương trình $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$

Nhận thấy : $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 + 1 + 0 + (-1) + (-1) = 0$

Và : $a_4 + a_2 + a_0 = 1 + 0 + (-1) = a_3 + a_1 = 1 + (-1)$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -1$

Lược đồ Hoócne

	1	1	0	-1	-1
$x = 1$	1	2	2	1	0
$x = -1$	1	1	1	0	

Ta có phương tình thương đương với $(x-1)(x+1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Sử dụng phương pháp hệ số bất định

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau.

a) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $3x^5 - 13x^4 + 16x^3 + 5x^2 - 21x + 6 = 0$.

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $(x+2)(x^2 - 5x + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -2, x = 1$ và $x = 4$

b) Phương tình tương đương với $(x+1)(3x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 27x + 6) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(3x^3 - 10x^2 + 12x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x-2)(x+1)(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1, x = \dfrac{1}{3}$ và $x = 2$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$

Lời giải

Đối với phương trình này ta không nhẩm được nghiệm nguyên hay hữu tỉ

Bây giờ ta giả sử phương trình trên phân tích được thành dạng

$(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + (a_1 + a_2)x^3 + (a_1a_2 + b_1 + b_2)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2 = 0$

Đồng nhất các hệ số ta có $\begin{cases} a_1 + a_2 = -4 \\ a_1a_2 + b_1 + b_2 = -10 \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 37 \\ b_1b_2 = -14 \end{cases}$

Suy ra $b_1 = -2; b_2 = -7; a_1 = -5; a_2 = 1$

Do đó phương trình tương đương với $(x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x^2 + x - 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ và $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$

Ví dụ 3: Giải các phường trình sau:

a) $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$ b) $x^4 - 4x = 1$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $x^4 - (2x - 3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = -3$

b) Phương trình tương đương với $x^4 - 2x^2 + 1 - 2(x^2 - 2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - [\sqrt{2}(x - 1)]^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1)(x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1=0 \\ x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{\sqrt{2}+3}}{2} \\ x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\{\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{\sqrt{2}+3}}{2};\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}\}$

Nhận xét: Đây là phương trình đưa về được dạng $\left(x^2+\alpha\right)^2=a\left(x+\beta\right)^2$

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $x^3-\left(2m+5\right)x^2+\left(m^2+6m+7\right)x-3m^2-3=0$(*) có ba nghiệm dương phân biệt.

Lời giải

Nhẩm nghiệm ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x=3$ do đó dùng lược đồ hoócne ta có

$$(*)\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left[x^2-2\left(m+1\right)x+m^2+1\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2-2\left(m+1\right)x+m^2+1=0\ (**) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có ba nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm dương phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0 \\ P>0 \\ S>0 \\ 3^2-2\left(m+1\right).3+m-2\neq 3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m+1\right)^2-m^2-1>0 \\ 2\left(m+1\right)>0 \\ m^2+1>0 \\ m\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0 \\ m>-1 \\ m\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow m>0$$

Vậy $m>0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.39: Giải các phương trình sau:

a) $2x^4+5x^3-3x^2-8x+4=0$ b) $-12+20x+19x^2-21x^3-4x^4+4x^5=0$

c) $-6+x-5x^2+x^3+x^4=0$ d) $x^5-2x^4+3x^3-6x^2+2x-4=0$

Bài 3.40: Giải các phương trình sau:

a) $x^4-2x^2-2x+1=0$ b) $x^4-x^2-2x-1=0$

Bài 3.41: Tìm m để phương trình $x^3-\left(2m+1\right)x^2+\left(m^2+m+1\right)x-m^2+m-1=0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

Loại 2: Đặt ẩn phụ.

1. Phương pháp giải:

Điểm quan trọng nhất trong đối với phương trình dạng này là phát hiện ẩn phụ $t = f\left(x\right)$ có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác 0.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$ b) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

Lời giải

a) Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được: $2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$.

Đặt $t = x + \frac{1}{x}, \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = t^2 - 2$

Ta có phương trình: $2(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

* $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$ (vô nghiệm).

* $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

b) Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được: $2x^2 - 21x + 74 - \frac{105}{x} + \frac{50}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + \frac{25}{x^2}) - 21(x + \frac{5}{x}) + 74 = 0$.

Đặt $t = x + \frac{5}{x}, \Rightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} = (x + \frac{5}{x})^2 - 10 = t^2 - 10$

Ta có phương trình: $2(t^2 - 10) - 21t + 74 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 21t + 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = \frac{9}{2} \end{array}\right.$

* $t = \frac{9}{2} \Rightarrow x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right.$.(thỏa mãn)

* $t=6 \Rightarrow x+\dfrac{5}{x}=6 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \left\{1;2;\dfrac{5}{2};5\right\}$.

Chú ý: Các phương trình trên có dạng tổng quát là $ax^4+bx^3+cx^2+dx \pm e=0$ với $\dfrac{e}{a}=\left(\dfrac{d}{b}\right)^2=k^2$. Tức là có dạng $ax^4+bx^3+cx^2 \pm bkx+ak^2=0$.

Cách giải: Xét $x=0$ xem có phải là nghiệm của phương trình không

Với $x \neq 0$ ta chia hai vế phương trình cho x^2 ta có pt: $a(x^2+\dfrac{k^2}{x^2})+b(x \pm \dfrac{k}{x})+c=0$

Đặt $t=x \pm \dfrac{k}{x}$, ta có $x^2+\dfrac{k^2}{x^2}=(x \pm \dfrac{k}{x})^2 \mp 2k=t^2 \mp 2k$ thay vào phương trình ta quy về phương trình bậc hai $a(t^2 \mp 2k)+bt+c=0$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$ b) $4\ \ x+5\ \ \ x+6\ \ \ x+10\ \ \ x+12\ \ =3x^2$

Lời giải

a) Phương rình tương đương với $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=24$.

Đặt $t=x^2+3x$, phương trình trở thành

$t(t+2)=24 \Leftrightarrow t^2+2t-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-6 \\ t=4 \end{array}\right.$

* $t=-6 \Rightarrow x^2+3x=-6 \Leftrightarrow x^2+3x+6=0$(Phương trình vô nghiệm)

* $t=4 \Rightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Vậy phương rình có nghiệm là $x=-4$ và $x=1$.

b) Phương trình tương đương với $4\ \ x^2+17x+60\ \ \ x^2+16x+60\ \ =3x^2$(*)

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$, chia hai vế cho x^2 ta có

* $\Leftrightarrow 4\left(x+17+\dfrac{60}{x}\right)\left(x+16+\dfrac{60}{x}\right)=3$

Đặt $y = x + 16 + \dfrac{60}{x}$ phương trình trở thành

$$4\ \ y+1\ \ y = 3 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $y = \dfrac{1}{2}$ ta có $x + 16 + \dfrac{60}{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 31x + 120 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -8 \\ x = -\dfrac{15}{2} \end{array}\right.$

Với $y = -\dfrac{3}{2}$ ta có $x + 16 + \dfrac{60}{x} = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 35x + 120 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -8$, $x = -\dfrac{15}{2}$ và $x = \dfrac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$.

Chú ý:

- Phương trình có dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ trong đó $a + b = c + d$

Cách giải: Đặt $t = x^2 + (a+b)x$ ta quy về phương trình bậc hai $(t + ab)(t + cd) = e$

- Phương trình có dạng $\ x+a\ \ \ x+b\ \ \ x+c\ \ \ x+d\ \ = mx^2$ trong đó $ab = cd$

Cách giải: Kiểm tra xem $x = 0$ có là nghiệm của phương trình hay không.

Xét $x \neq 0$ chia hai vế cho x^2 ta được $\left(x + a + b + \dfrac{ab}{x}\right)\left(x + c + d + \dfrac{cd}{x}\right) = m$

Đặt $t = x + \dfrac{ab}{x}$ ta quy về phương trình bậc hai $\ t + a + b\ \ \ t + c + d\ \ = m$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2$ b) $3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x+1)^2 = 5(x^3 + 1)$

Lời giải

a) Đặt $x = t - 2$ phương trình trở thành

$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2\ \ t^2 + 6\ \ = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Suy ra $x = -2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$.

b) Vì $x = -1$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế cho $x^3 + 1$ ta được:

$3\dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} - 2\dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1} = 5$.

Đặt $t = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1}$, phương trình trở thành

$$3t - \frac{2}{t} = 5 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

* $t = 2 \Rightarrow \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

* $t = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Chú ý: Phương trình ở câu a) có dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$.

Cách giải: Đặt $x = t - \dfrac{a + b}{2}$ ta đưa về phương trình trùng phương

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow c \geq 2(\dfrac{a - b}{2})^4$

Ví dụ 4: Cho phương trình $m + 1 \;\; x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ (*). Tìm m để

a) Phương trình (*) có nghiệm
b) Phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt

Lời giải

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, phương trình trở thành

$m + 1 \;\; t^2 - 4t + 1 = 0$ (*)

a) Với $m = -1$ phương trình (*) trở thành $-4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$ suy ra $m = -1$ thì phương trình (*) có nghiệm

Với $m \neq -1$ phương trình (**) là phương trình bậc hai.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm không âm

- TH1: Phương trình (**) có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \;\; m + 1 \;\; \geq 0 \\ \dfrac{4}{m + 1} \geq 0 \\ \dfrac{1}{m + 1} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m \leq 3 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3$$

- TH2: Phương trình (**) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m+1} < 0 \Leftrightarrow m < -1$
- TH3: Phương trình (**) có một nghiệm bằng không và một nghiệm âm(không xảy ra vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (**) với mọi m)

Vậy phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $m \le 3$.

b) Với $m = -1$ phương trình (*) trở thành $-4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$ suy ra $m = -1$ không thỏa mãn

Với $m \ne -1$ phương trình (**) là phương trình bậc hai.

Phương trình (*) bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (m+1) > 0 \\ \dfrac{4}{m+1} > 0 \\ \dfrac{1}{m+1} > 0 \end{cases} \begin{cases} m < 3 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Vậy phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 3$.

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + m = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 6$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

Lời giải

Phương trình tương đương $(x^4 + 4x^3 + 4x^2) - (7x^2 + 14x) + m = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) + m = 0$

Đặt $t = x^2 + 2x$, $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \ge -1$ suy ra $t \ge -1$

Phương trình trở thành $t^2 - 7t + m = 0$ (*)

a) Khi $m = 6$ ta có $t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 6 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì $x^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

Với $t = 6$ thì $x^2 + 2x = 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1 \pm \sqrt{2}$ và $x = -1 \pm \sqrt{7}$.

b) Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $t \ge -1$

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = t^2 - 7t + m$ trên $[-1; +\infty)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Xét hàm số $y = t^2 - 7t + m$ trên $[-1; +\infty)$

Ta có bảng biến thiên

x	-1		7		$+\infty$
y	$8+m$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra để phương trình có nghiệm là $m \le 0$.

Chú ý: Phương trình trên là phương trình có thể đưa về dạng $A\left(x^2+ax\right)^2+B\left(x^2+ax\right)+C=0$ và cách giải là đặt $t=x^2+ax$ và đưa về phương trình bậc hai $At^2+Bt+C=0$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.42: Giải các phương trình sau

a) $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$ b) $x^6+3x^5-6x^4-21x^3-6x^2+3x+1=0$

b) $\left(x+3\right)^4+\left(x-5\right)^4=1312$ c) $\left(2x-1\right)\left(4x+5\right)\left(8x+3\right)\left(16x-15\right)=99x^2$

d) $x^4-9x^2-2x+15=0$ e) $2\left(x^2-x+1\right)^2+5\left(x+1\right)^2=11\left(x^3+1\right)$.

Bài 3.43: Tìm m để phương trình : $(x^2-1)(x+3)(x+5)=m$ có nghiệm.

Bài 3.44: Tìm m để phương trình : $x^4-4x^3+8x=m$ có bốn nghiệm phân biệt.