§3. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức cộng:

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

2. Công thức nhân đôi, hạ bậc:

a) Công thức nhân đôi.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

b) Công thức hạ bậc.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng.

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích.

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} \qquad \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC, BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng công thức lượng giác một cách linh hoạt để biến đổi biểu thức lượng giác nhằm triệt tiêu các giá trị lượng giác của góc không đặc biệt và đưa về giá trị lượng giác đặc biệt.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^0$, $\sin 18^0$, $\tan \frac{7\pi}{12}, \cot \frac{5\pi}{8}$.

Lời giải

- Vì $795^0 = 75^0 + 2.360^0 = 30^0 + 45^0 + 2.360^0$ nên

$$\cos 795^0 = \cos 75^0 = \cos 30^0 \cos 45^0 - \sin 30^0 \sin 45^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- Vì $54^0 + 36^0 = 90^0$ nên $\sin 54^0 = \cos 36^0$

Mà $\cos 36^0 = \cos\left(2.18^0\right) = 1 - 2\sin^2 18^0$

$$\sin 54^0 = \sin\left(18^0 + 36^0\right) = \sin 18^0 \cos 36^0 + \sin 36^0 \cos 18^0$$

$$= \sin 18^0.\left(1 - 2\sin^2 18^0\right) + 2\sin 18^0 \cos^2 18^0 = \sin 18^0.\left(1 - 2\sin^2 18^0\right) + 2\sin 18^0\left(1 - \sin^2 18^0\right)$$

$$= 3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0$$

Do đó $3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 \Leftrightarrow \left(\sin 18^0 - 1\right)\left(4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 18^0 = 1$ hoặc $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Vì $0 < \sin 18^0 < 1$ nên $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

- $\tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$

- $\cot\frac{5\pi}{8} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$

Ta lại có $1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(2.\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2\frac{\pi}{8}}$ suy ra

$1 - \tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2}$ hoặc $\tan\frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$

Do $\tan\frac{\pi}{8} > 0$ nên $\tan\frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$

Vậy $\cot\frac{5\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin 22^0 30' \cos 202^0 30'$

b) $B = 4\sin^4\frac{\pi}{16} + 2\cos\frac{\pi}{8}$

c) $C = \dfrac{\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{15}}$

d) $D = \sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9}$

Lời giải

a) Cách 1: Ta có $\cos 202^0 30' = \cos\ \ 180^0 + 22^0 30'\ \ = -\cos 22^0 30'$

Do đó $A = -\sin 22^0 30' \cos 22^0 30' = -\frac{1}{2}\sin 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Cách 2: $A = \frac{1}{2}\left[\sin\ \ 22^0 30' + 202^0 30'\ \ + \sin\ \ 22^0 30' - 202^0 30'\ \ \right] = \frac{1}{2}\left[\sin 225^0 + \sin\ \ -180^0\ \ \right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(180^0+45^0\right)-\sin 180^0\right]=-\frac{1}{2}\sin 45^0=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) $B=\left(2\sin^2\frac{\pi}{16}\right)^2+2\cos\frac{\pi}{8}=\left[1-\cos\left(2.\frac{\pi}{16}\right)\right]^2+2\cos\frac{\pi}{8}$

$$=1-2\cos\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos\frac{\pi}{8}=1+\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=1+\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$$

c) $C=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}}=\dfrac{2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}\right)}{-2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}\right)}=-\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$

d) $D=\left(\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{5\pi}{9}=2\sin\frac{4\pi}{9}.\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{5\pi}{9}=\sin\frac{4\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}=0$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A=\dfrac{1}{\cos 290^0}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\sin 250^0}$

b) $B=\left(1+\tan 20^0\right)\left(1+\tan 25^0\right)$

c) $C=\tan 9^0-\tan 27^0-\tan 63^0+\tan 81^0$

d) $D=\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$

Lời giải

a) Ta có $\cos 290^0=\cos\left(180^0+90^0+20^0\right)=-\cos\left(90^0+20^0\right)=\sin 20^0$

$\sin 250^0=\sin\left(180^0+90^0-20^0\right)=-\sin\left(90^0-20^0\right)=-\cos 20^0$

$$C=\frac{1}{\sin 20^0}-\frac{1}{\sqrt{3}\cos 20^0}=\frac{\sqrt{3}\sin 20^0-\sin 20^0}{\sqrt{3}\sin 20^0.\cos 20^0}=4\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^0-\frac{1}{2}\sin 20^0}{\sqrt{3}.2.\sin 20^0.\cos 20^0}$$

$$=4\frac{\sin 60^0\cos 20^0-\cos 60^0\sin 20^0}{\sqrt{3}\sin 40^0}=\frac{4\sin 40^0}{\sqrt{3}\sin 40^0}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

b) Cách 1: Ta có $B=\left(1+\dfrac{\sin 20^0}{\cos 20^0}\right)\left(1+\dfrac{\sin 25^0}{\cos 25^0}\right)=\dfrac{\sin 20^0+\cos 20^0}{\cos 20^0}.\dfrac{\sin 25^0+\cos 25^0}{\cos 25^0}$

$=\sqrt{2}.\dfrac{\sin 20^0\cos 45^0+\cos 20^0\sin 45^0}{\cos 20^0}.\sqrt{2}.\dfrac{\sin 25^0\cos 45^0+\cos 25^0\sin 45^0}{\cos 25^0}$

$=2\dfrac{\sin 65^0\sin 70^0}{\cos 20^0\cos 25^0}=2$

Cách 2: Ta có $\tan 45^0=\tan\left(20^0+50^0\right)=\dfrac{\tan 20^0+\tan 25^0}{1-\tan 20^0\tan 25^0}$

Suy ra $1=\dfrac{\tan 20^0+\tan 25^0}{1-\tan 20^0\tan 25^0}\Leftrightarrow \tan 20^0+\tan 25^0+\tan 20^0\tan 25^0=1$

$\Leftrightarrow \left(1+\tan 20^0\right)\left(1+\tan 25^0\right)=2$.

Vậy $B=2$

c) $C=\tan 9^0+\tan 81^0-\left(\tan 27^0+\tan 63^0\right)$

$=\dfrac{\sin 9^0\cos 81^0+\sin 81^0\cos 9^0}{\cos 9^0\cos 81^0}-\dfrac{\sin 27^0\cos 63^0+\sin 63^0\cos 27^0}{\cos 27^0\cos 63^0}$

$=\dfrac{1}{\cos 9^0\sin 9^0}-\dfrac{1}{\cos 27^0\sin 27^0}=\dfrac{2}{\sin 18^0}-\dfrac{2}{\sin 54^0}=\dfrac{2\left(\sin 54^0-\sin 18^0\right)}{\sin 18^0\sin 54^0}$

$=\dfrac{4\cos 36^0.\sin 18^0}{\sin 18^0.\sin 54^0}=4$

d) $D=\sin^2\dfrac{\pi}{9}+\sin^2\dfrac{2\pi}{9}+\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2\pi}{9}=\left(\sin\dfrac{\pi}{9}+\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^2-\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2\pi}{9}$

$=\left(2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{18}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{9}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\cos\dfrac{\pi}{9}\right)$

$=\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{9}}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\cos\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{3}{4}$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\left[\frac{1}{2}\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right] = 2\sin(x \pm \frac{\pi}{3})$
- $\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \pm \frac{1}{2}\cos x\right] = 2\sin(x \pm \frac{\pi}{6})$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right] = \sqrt{2}\sin(x \pm \frac{\pi}{4})$.

Ví dụ 4: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{32}.\cos\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{8}$

b) $B = \sin 10^o.\sin 30^o.\sin 50^o.\sin 70^o$

c) $C = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}$

d) $D = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7}$

Lời giải

a) $A = \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{32}\right).\cos\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$

b) Ta có $B = \frac{1}{2}\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^o$ do đó

$$\begin{aligned}16\sin 20^0.B &= 8\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^o\\ &= 4\sin 40^0\cos 40^0\cos 80^o\\ &= 2\sin 80^0\cos 80^0 = \sin 160^0\end{aligned}$$

Suy ra $B = \frac{\sin 160^0}{16\sin 20^0} = \frac{1}{16}$.

c) Ta có $C = 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$. Vì $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$ nên

$2\sin\frac{\pi}{5}.C = 4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{4\pi}{5}$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$

c) $D=\dfrac{1+\cos\dfrac{2\pi}{7}}{2}+\dfrac{1+\cos\dfrac{4\pi}{7}}{2}+\dfrac{1+\cos\dfrac{6\pi}{7}}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}\right)$

Xét $T=\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$, vì $\sin\dfrac{\pi}{7}\neq 0$ nên

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\pi}{7}T&=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\\&=\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)\\&=-\sin\frac{\pi}{7}\end{aligned}$$

Suy ra $T=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $D=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}.\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$.

Ví dụ 5: Cho α,β thoả mãn $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos\ \ \alpha-\beta$ và $\sin\ \ \alpha+\beta$.

Lời giải

- Ta có $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ (1)

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{3}{2}$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta=2\\&\Leftrightarrow 2+2\ \ \sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\ \ =2\Leftrightarrow 2\cos\ \ \alpha-\beta\ \ =0\end{aligned}$$

Vậy $\cos\ \ \alpha-\beta\ \ =0$

- Từ giả thiết ta có $(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)+\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0$ (Do $\cos(\alpha-\beta)=0$)

Suy ra $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Bài tập rèn luyện.

Bài 6.26: Tính các giá trị lượng giác sau $\sin\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{16}$, $\cot\frac{11\pi}{12}$

Bài 6.27: Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $A=4\sin 45^0\cos 12^0\cos 3^0-\sin 54^0-\sin 36^0$

b) $B=(1-\cot 23^0)(1-\cot 22^0)$

c) $C=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$

d) $D=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{5}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{20}}{2\cos\frac{\pi}{5}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{20}}$

Bài 6.28: Tính:

a) Tính giá trị lượng giác của góc $\frac{\pi}{12}$

b) $\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}$

c) $\cos 36^0-\cos 72^0$

d) $\sin 10^0\sin 50^0\sin 70^0$

Bài 6.29: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=\cos^2 73^0+\cos^2 47^0+\cos 73^0\cos 47^0$

b) $B=\sin 6^0\sin 42^0\sin 66^0\sin 78^0$

c) $C=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$

d) $D=\frac{1}{\sin 10^0}-4\sin 70^0$

Bài 6.30: Cho α,β thoả mãn $\sin\alpha+\sin\beta=m$ và $\cos\alpha+\cos\beta=n$, $mn\neq 0$.

Tính $\cos\left(\alpha-\beta\right)$, $\cos\left(\alpha+\beta\right)$ và $\sin\left(\alpha+\beta\right)$.

Bài 6.31: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\sin\frac{19\pi}{30}\sin\frac{25\pi}{30}$

b) $\cos 24^o+\cos 48^o-\cos 84^o-\cos 12^o$

c) $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

Bài 6.32: Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $A=\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$

b) $B=\cos 10^0.\cos 50^0.\cos 70^0$

c) $C=\sin 6^o.\sin 42^o.\sin 66^o.\sin 78^o$

d) $E=\cos\frac{2\pi}{31}.\cos\frac{4\pi}{31}.\cos\frac{8\pi}{31}.\cos\frac{16\pi}{31}.\cos\frac{32\pi}{31}$

e) $F=\sin 5^o.\sin 15^o.\sin 25^o....\sin 75^o.\sin 85^o$

Bài 6.33: Tính $A=\left(1+\tan 1^0\right)\left(1+\tan 2^0\right)...\left(1+\tan 45^0\right)$

Bài 6.34: Tính $A=\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha...\cos 999\alpha$ với $\alpha=\frac{2\pi}{1999}$

DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho $\cos 2x = -\dfrac{4}{5}$, với $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0,\ \ \cos x > 0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x = -\frac{4}{5}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.2.\frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Ví dụ 2: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6\sin^2\alpha$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Lời giải

Ta có $\cos 4\alpha + 2 = 6\sin^2\alpha \Leftrightarrow 2\cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3\ \ 1 - \cos 2\alpha$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow\ \ 2\cos 2\alpha - 1\ \ \ \cos 2\alpha + 2\ \ = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$ (Vì $\cos 2\alpha + 2 > 0$)

Ta có $1 + \tan^2 2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3$

Vì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \alpha < 2\pi$ nên $\sin 2\alpha < 0$. Mặt khác $\cos 2\alpha > 0$ do đó $\tan 2\alpha < 0$

Vậy $\tan 2\alpha = -\sqrt{3}$

Ví dụ 3: Cho $\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\cot^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\cot^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=7$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2\alpha+1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}=7$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha+1\right)+\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha+1\right)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=7$

$\Leftrightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha+1=7\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1=7\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow 2=9\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow 8=9\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2$

$\Leftrightarrow 8=9\sin^2 2\alpha$

$\Leftrightarrow 16=9\left(1-\cos 4\alpha\right)$

$\Leftrightarrow \cos 4\alpha=-\dfrac{7}{9}$

Vậy $\cos 4\alpha=-\dfrac{7}{9}$

Ví dụ 4: Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\cot\dfrac{\alpha}{2}$ với $0<\alpha<\pi$. Tính $\tan\left(\dfrac{\alpha+2013\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}.\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2\dfrac{\alpha}{2}+1}$

$\cos\alpha=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\left(1-\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2\dfrac{\alpha}{2}+1}$

Do đó $\sin\alpha+\cos\alpha=\cot\dfrac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2\dfrac{\alpha}{2}+1}+\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2\dfrac{\alpha}{2}+1}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{\alpha}{2}\left(1+2\tan\dfrac{\alpha}{2}-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\tan^3\dfrac{\alpha}{2}-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}+1=0$

$\Leftrightarrow\left(\tan\dfrac{\alpha}{2}-1\right)^2\left(\tan\dfrac{\alpha}{2}+1\right)=0\Leftrightarrow\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm1$

Vì $0<\alpha<\pi\Rightarrow 0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ do đó $\tan\dfrac{\alpha}{2}>0$ nên $\tan\dfrac{\alpha}{2}=1\Rightarrow\cot\dfrac{\alpha}{2}=1$

Ta có $\tan\left(\dfrac{\alpha+2013\pi}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+2006\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cot\dfrac{\alpha}{2}=-1$

Vậy $\tan\left(\dfrac{\alpha+2013\pi}{2}\right)=-1$

***Lưu ý*:** Ta có thể biểu diễn $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$ qua $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ như sau:

$\sin\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2},\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\tan\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2},\cot\alpha=\dfrac{1-t^2}{2t}$ với α làm các biểu thức có nghĩa.

Ví dụ 5: Cho $\sin\ \alpha+\beta\ =\dfrac{1}{3},\ \tan\alpha=-2\tan\beta$.

Tính $A=\sin\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\beta-\dfrac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Lời giải

Ta có $\sin\ \alpha+\beta\ =\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ (1)

$\tan\alpha=-2\tan\beta\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\beta=-2\sin\beta\cos\alpha$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases}\cos\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{3}\\ \sin\alpha\cos\beta=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos^2\alpha\sin^2\beta=\dfrac{1}{9}\\ \sin^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{4}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ 1-\sin^2\alpha\ \ \sin^2\beta=\dfrac{1}{9}\\ \sin^2\alpha\ \ 1-\sin^2\beta\ =\dfrac{4}{9}\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\sin^2\alpha \quad \sin^2\beta = \dfrac{1}{9} \\ \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(1-\sin^2\beta - \dfrac{1}{3}\right)\sin^2\beta = \dfrac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^4\beta - \frac{2}{3}\sin^2\beta + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \left(\sin^2\beta - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{1}{3}$$

Do đó $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

Ta có $\sin\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin\dfrac{\pi}{4}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2.\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2+3\sqrt{2}}{12}$$

$$\sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[-\cos 2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + 2\sin^2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + 2.\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2+3\sqrt{2}}{12}$$

Do đó $A = -\dfrac{2+3\sqrt{2}}{12} + \dfrac{-2+3\sqrt{2}}{12} = -\dfrac{1}{3}$

2. Bài tập luyện tập.

Bài 6.35: Cho $\cos 2x = \dfrac{3}{5}$ (với $\dfrac{3\pi}{4} < x < \pi$). Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Bài 6.36: Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

a) $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\tan(a+b)$ khi $\sin \mathrm{a} = \dfrac{8}{17}$, $\tan b = \dfrac{5}{12}$ và *a, b* là các góc nhọn.

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$ *khi* $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

c) $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ *khi* $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Bài 6.37: Cho $2\cos\ \alpha+\beta\ = \cos\alpha\cos\ \pi+\beta\ $. Tính $A = \dfrac{1}{2\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{2\sin^2\beta + 3\cos^2\beta}$.

Bài 6.38: a) Cho $\tan\alpha = \dfrac{m}{n}$. Tính $A = m\sin 2\alpha + n\cos 2\alpha$.

b) Cho $\dfrac{\cos\ \ \alpha+\beta}{\cos\ \ \alpha-\beta}=\dfrac{m}{n}$. Tính $B=\tan\alpha.\tan\beta$.

c) Cho $\tan\ \ \alpha+\beta\ \ =m$ và $\tan\ \ \alpha-\beta\ \ =n$. Tính $\tan 2\alpha$.

Bài 6.39: Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ và $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$. Tính $\tan\dfrac{2\alpha+2015\pi}{4}$.

DẠNG TOÁN 3: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ CHỨNG MINH BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO BIẾN.

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh đẳng thức lượng giác ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt các công thức lượng giác.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

a) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4\alpha}{4}$

b) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha$

c) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\cot^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

Lời giải

a) Ta có $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

$=1-\frac{1-\cos 4\alpha}{4}=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4\alpha}{4}$

b) Ta có

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$

$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\dfrac{3}{4}\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha=1-\dfrac{3}{8}\left(1-\cos4\alpha\right)$

$=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos4\alpha$

c) Ta có $\dfrac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2}$

$$=\frac{\left[\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{\left[\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}=\frac{2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\cot^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

Ví dụ 2: Cho $0<\alpha<\pi,\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}=2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Lời giải

a) Do $0<\alpha<\pi$ nên $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)>0,\sin\alpha>0$

Đẳng thức tương đương với

$\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)^2=4\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1+\cos\alpha}\sqrt{1-\cos\alpha}=2\left[1-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $VT=\dfrac{\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}\right)\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)}$

$$= \frac{2+2\sqrt{1+\cos\alpha}.\sqrt{1-\cos\alpha}}{2\cos\alpha} = \frac{1+\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1+\left|\sin\alpha\right|}{\cos\alpha}$$

Vì $0<\alpha<\pi$ nên $\sin\alpha>0$ do đó

$$VT = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng

a) $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

b) $\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} = 2$ với $\sin\alpha+\sin\beta = 3\sin\ \alpha+\beta\ ,\alpha+b \ne k2\pi$

c) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta\cos\ \alpha+\beta}{\cos\alpha-\sin\beta\sin\ \alpha+\beta} = \tan\ \alpha+\beta$

Lời giải

a) Ta có $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta) = -\frac{1}{2}\left[\cos 2\alpha - \cos 2\beta\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ 1-2\sin^2\alpha\ -\ 1-2\sin^2\beta\ \right] = \sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

b) Từ giả thiết ta có $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 6\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Do $\alpha+\beta \ne k2\pi \Rightarrow \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \ne 0$ suy ra $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 3\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 3\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=2\Rightarrow \text{ĐPCM}$$

c) Ta có $VT=\dfrac{\sin\alpha+\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+2\beta\right)+\sin\left(-\alpha\right)\right]}{\cos\alpha-\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\alpha+2\beta\right)-\cos\left(-\alpha\right)\right]}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\left(\alpha+2\beta\right)}{\cos\alpha+\cos\left(\alpha+2\beta\right)}$

$$=\frac{2\sin\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(-\beta\right)}{2\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(-\beta\right)}=\tan\left(\alpha+\beta\right)=VP\Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$

b) $B=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right).\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Lời giải

a) Ta có: $A=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left[3+\cos2\alpha+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2\alpha\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\alpha\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[3+\cos2\alpha+2\cos\frac{4\pi}{3}\cos2\alpha\right]=\frac{3}{2}$$

b) Vì $\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$ và $\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên

$$B=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Ví dụ 5: Đơn giản biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{\cos a+2\cos 2a+\cos 3a}{\sin a+\sin 2a+\sin 3a}$ b) $B=\dfrac{\cos\left(a+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cot a-\cot\dfrac{a}{2}}$

c) $C=\cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+...+\cos(a+nb)$ (n $\in$ N)

Lời giải

a) $A=\dfrac{(\cos a+\cos 3a)+2\cos 2a}{(\sin a+\sin 3a)+2\sin 2a}=\dfrac{2\cos 2a\cos a+2\cos 2a}{2\sin 2a\cos a+2\sin 2a}=\dfrac{2\cos 2a(\cos a+1)}{2\sin 2a(\cos a+1)}=\cot 2a$

b) Ta có $\cos\left(a+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos a\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos a$ và

$$\cot a-\cot\frac{a}{2}=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{a}{2}\cos a-\cos\frac{a}{2}\sin a}{\sin a\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{a}{2}-a\right)}{\sin a\sin\frac{a}{2}}=\frac{-\sin\frac{a}{2}}{\sin a\sin\frac{a}{2}}=-\frac{1}{\sin a}$$

Suy ra $B=\dfrac{\cos a}{-\dfrac{1}{\sin a}}=-\sin a\cos a=-\dfrac{\sin 2a}{2}$.

c) Ta có $C.2\sin\dfrac{b}{2}=2\sin\dfrac{b}{2}\cos a+2\sin\dfrac{b}{2}\cos(a+b)+2\sin\dfrac{b}{2}\cos(a+2b)+...+2\sin\dfrac{b}{2}\cos(a+nb)$

$$=\sin\left(\frac{b}{2}+a\right)+\sin\left(\frac{b}{2}-a\right)+\sin\left(\frac{3b}{2}+a\right)+\sin\left(-\frac{b}{2}-a\right)+\sin\left(\frac{5b}{2}+a\right)+\sin\left(-\frac{3b}{2}-a\right)$$

$$+...+\sin\left(\frac{(2n+1)b}{2}+a\right)+\sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2}-a\right)$$

$$\sin\left(\frac{b}{2}-a\right)+\sin\left(\frac{(2n+1)b}{2}+a\right)=2\sin(n+1)b\cos\left(\frac{nb}{2}-a\right)$$

Suy ra $C=\dfrac{\sin(n+1)b\cos\left(\dfrac{nb}{2}-a\right)}{\sin\dfrac{b}{2}}$

Ví dụ 6: Cho $\sin(a+b)=2\cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M=\dfrac{1}{2-\sin 2a}+\dfrac{1}{2-\sin 2b}$ không phụ thuộc vào a,b.

Lời giải

Ta có $M=\dfrac{4-(\sin 2a+\sin 2b)}{(2-\sin 2a)(2-\sin 2b)}=\dfrac{4-(\sin 2a+\sin 2b)}{4-2(\sin 2a+\sin 2b)+\sin 2a\sin 2b}$

Ta có $\sin 2a+\sin 2b=2\sin(a+b)\cos(a-b)$

Mà $\sin(a+b)=2\cos(a-b)\Rightarrow \sin^2(a+b)=4\cos^2(a-b)$ nên

$\cos 2(a+b)-\cos 2(a-b)=1-2\sin^2(a+b)-\left[2\cos^2(a-b)-1\right]$

$=2-2\left[\sin^2(a+b)+\cos^2(a-b)\right]=2-10\cos^2(a-b)$

Suy ra $M=\dfrac{4-4\cos^2(a-b)}{4-8\cos^2(a-b)-\frac{1}{2}.\left[2-10\cos^2(a-b)\right]}=\dfrac{4-4\cos^2(a-b)}{3-3\cos^2(a-b)}=\dfrac{4}{3}$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng

a) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=4\sin\alpha.\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$

b) $\sin^3\dfrac{\alpha}{3}+3\sin^3\dfrac{\alpha}{3^2}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\dfrac{\alpha}{3^n}=\dfrac{1}{4}\left(3^n\sin\dfrac{\alpha}{3^n}-\sin\alpha\right)$.

Lời giải

a) Ta có $\sin 3\alpha=\sin\ 2\alpha+\alpha\ =\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\ \ 1-\sin^2\alpha\ \ +\ \ 1-2\sin^2\alpha\ \ \sin\alpha$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\quad(1)$

Mặt khác $4\sin\alpha.\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=-4\sin\alpha.\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}-\cos\ \ -2\alpha\ \ \right)$

$=-2\sin\alpha.\left(-\dfrac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=2\sin\alpha\left(\dfrac{1}{2}+1-2\sin^2\alpha\right)$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM

b) Theo câu a) ta có $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \Rightarrow \sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$

Do đó $\sin^3\dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3} - \sin\alpha}{4}$, $\sin^3\dfrac{\alpha}{3^2} = \dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^2} - \sin\dfrac{\alpha}{3}}{4}$, ..., $\sin^3\dfrac{\alpha}{3^n} = \dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^n} - \sin\dfrac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$

Suy ra $VT = \dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3} - \sin\alpha}{4} + 3\dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^2} - \sin\dfrac{\alpha}{3}}{4} + ... + 3^{n-1}\dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^n} - \sin\dfrac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$

$$= -\frac{\sin\alpha}{4} + 3^{n-1}\frac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^n}}{4} = \frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n} - \sin\alpha\right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

Lưu ý: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$,

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, hai công thức này được gọi là công thức nhân ba

3. Các bài tập luyện tập.

Bài 6.40: Chứng minh rằng

a) $\sin^4\alpha = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha + \dfrac{1}{8}\cos 4\alpha$

b) $\sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16} = \dfrac{3}{2}$

Bài 6.41: Cho $\sin x = 2\sin(x+y), x+y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Chứng minh $\tan(x+y) = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2}$.

Bài 6.42: Chứng minh các hệ thức sau:

a) $4(\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha) = \sin 4\alpha$

b) $\tan x + \tan y = \dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

c) $\tan x.\tan 3x = \dfrac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x.\tan^2 x}$

Bài 6.43: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x:

a) $A=\sqrt{4\sin^4 x+\sin^2 2x}+4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

b) $B=4\cos^4 x+\cos^2 2x-4\cos^2 x\cos 2x$

c) $C=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

Bài 6.44: Đơn giản biểu thức sau:

a) $A=\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$

b) $B=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}$ $(0<\alpha\le\pi)$

c) $C=\frac{\cos a-\cos 3a+\cos 5a-\cos 7a}{\sin a+\sin 3a+\sin 5a+\sin 7a}$

d) $D=\cos a-\frac{\cos\left(2a-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos a}$

Bài 6.45: Chứng minh các hệ thức sau:

a) Nếu $2\tan a=\tan(a+b)$ thì $\sin b=\sin a.\cos(a+b)$

b) Nếu $2\tan a=\tan(a+b)$ thì $3\sin b=\sin(2a+b)$

c) Nếu $\tan(a+b).\tan b=-3$ thì $\cos(a+2b)+2\cos a=0$

d) Nếu $3\sin(a+b)=\cos(a-b)$ thì $8\sin^2(a+b)=\cos 2a\cos 2b$

Bài 6.46: Chứng minh rằng $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

Bài 6.47: Chứng minh rằng

a) $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$.

b) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ ...\ \cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

Bài 6.48: Chứng minh rằng: a) $\frac{1}{\sin x}=\cot\frac{x}{2}-\cot x$.

b) $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}+...+\frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot 2^{n-1}\alpha$ $(2^{n-1}\alpha\ne k\pi)$

Bài 6.49: Chứng minh rằng a) $\tan x=\cot x-2\cot 2x$

b) $\frac{1}{2}.\tan\frac{a}{2}+\frac{1}{2^2}.\tan\frac{a}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}.\tan\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2^n}.\cot\frac{a}{2^n}-\cot a$

Bài 6.50: Chứng minh rằng nếu $x\ne\frac{k\pi}{6}, k\in Z$ thì $\frac{\tan 3x}{\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

Áp dụng tính $A=\tan 6^o\tan 54^o\tan 66^o$.

Bài 6.51: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin 1^0 \sin 2^0} + \frac{1}{\sin 2^0 \sin 3^0} + ... + \frac{1}{\sin (n-1)^0 \sin n^0} = \cot 1^0 - \cot n^0$$

Bài 6.52: Chứng minh rằng $2\sin 2^0 + 4\sin 4^0 + ... + 178\sin 178^0 = 90\cot 1^0$

DẠNG TOÁN 4: BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin\alpha| \leq 1$, $|\cos\alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2\cot^2\alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$

b) $\cot\alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) \geq 2\cos^2\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} + \sin^2\alpha \geq 2 \Leftrightarrow \sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (\sin^2\alpha - 1)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} \ (*)$$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \cos\alpha > 0 \end{cases}$ nên

$(*) \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha$ (đúng) ĐPCM.

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha + \frac{1}{2\sin\alpha}\right) \geq 2$

Lời giải

Ta có $\left(\sin\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2\sin\alpha}\right)=\sin\alpha\cos\alpha+\dfrac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}+1$

Vì $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha\cos\alpha>0$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}\ge 2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha.\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}}=1$$

Suy ra $\left(\sin\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2\sin\alpha}\right)\ge 2$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với $0\le\alpha\le\pi$ thì

$$(2\cos2\alpha-1)^2-4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>(\sqrt{2\sin\alpha}-2)(3-2\cos2\alpha).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow (2\cos2\alpha-1)^2-2\left[1-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]+2(3-2\cos2\alpha)>\sqrt{2\sin\alpha}\left[3-2(1-2\sin^2\alpha)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2\alpha-8\cos2\alpha+5+2\sin\alpha>\sqrt{2\sin\alpha}(4\sin^2\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow 4(1-\cos2\alpha)^2+1+2\sin\alpha>\sqrt{2\sin\alpha}(4\sin^2\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow 16\sin^4\alpha+2\sin\alpha+1>\sqrt{2\sin\alpha}(4\sin^2\alpha+1)$$

Đặt $\sqrt{2\sin\alpha}=t$, vì $0\le\alpha\le\pi\Rightarrow 0\le t\le\sqrt{2}$.

Bất đẳng thức trở thành $t^8+t^2+1>t(t^4+1)\Leftrightarrow t^8-t^5+t^2-t+1>0$ (*)

+ Nếu $0\le t<1$: (*) $\Leftrightarrow t^8+t^2(1-t^3)+1-t>0$ đúng vì $1-t>0$, $1-t^3>0, t^2\ge 0$ và $t^8\ge 0$

.

+ Nếu $1 \le t \le \sqrt{2}$: (*) $\Leftrightarrow t^5\left(t^3-1\right)+t\left(t-1\right)+1>0$ đúng vì $t^5\left(t^3-1\right)\ge 0, t\left(t-1\right)\ge 0$.

Vậy bất đẳng thức (*) đúng suy ra ĐPCM.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A=\sin x+\cos x$ b) $B=\sin^4 x+\cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

Vì $\sin 2x\le 1$ nên $A^2=1+\sin 2x\le 1+1=2$ suy ra $-\sqrt{2}\le A\le\sqrt{2}$.

Khi $x=\frac{\pi}{4}$ thì $A=\sqrt{2}$, $x=-\frac{3\pi}{4}$ thì $A=-\sqrt{2}$

Do đó $\max A=\sqrt{2}$ và $\min A=-\sqrt{2}$.

b) Ta có $B=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}+\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$

$$=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{2+1+\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\cos 4x$$

Vì $-1\le\cos 4x\le 1$ nên $\frac{1}{2}\le\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\cos 4x\le 1$ suy ra $\frac{1}{2}\le B\le 1$.

Vậy $\max B=1$ khi $\cos 4x=1$ và $\min B=\frac{1}{2}$ khi $\cos 4x=-1$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A=2-2\sin x-\cos 2x$

Lời giải

Ta có $A=2-2\sin x-\left(1-2\sin^2 x\right)=2\sin^2 x-2\sin x+1$

Đặt $t=\sin x, \left|t\right|\le 1$ khi đó biểu thức trở thành $A=2t^2-2t+1$

Xét hàm số $y=2t^2-2t+1$ với $\left|t\right|\le 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	5 $\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$ 1

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = 1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 6.53: Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\tan x + \cot x \geq 2$

Bài 6.54: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $B = \cos 2x + \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$

Bài 6.55: Chứng minh rằng $\cos x\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 2}\right) \leq \sqrt{3}$

Bài 6.56: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2\sin x + \sin 2x$.

Bài 6.57: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sin\frac{A}{2}\sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

✍ DẠNG TOÁN 5: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

Lời giải

a) $VT = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

Mặt khác trong tam giác ABC ta có $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

Suy ra $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$, $\sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A+B}{2}$

Vậy $VT=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{A+B}{2}\right)$

$=4\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $VT=\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\dfrac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2 C=2-\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\cos^2 C$

$=2-\cos\ \ A+B\ \ \cos\ \ A-B\ \ -\cos^2 C$

Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cos\ \ A+B\ \ =-\cos C$ nên

$VT=2+\cos C\cos\ \ A-B\ \ +\cos C\cos\ \ A+B\ \ =2+\cos C\left[\cos\ \ A-B\ \ +\cos\ \ A+B\ \ \right]$

$=2+\cos C.2\cos A\cos B=2(1+\cos A\cos B\cos C)=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

c) $VT=2\sin\ \ A+B\ \ \cos\ \ A-B\ \ +2\sin C\cos C$

Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cos C=-\cos\ \ A+B\ \ ,\sin\ \ A+B\ \ =\sin C$ nên

$VT=2\sin C\cos\ \ A-B\ \ -2\sin C\cos\ \ A+B\ \ =2\sin C\left[\cos\ \ A-B\ \ -\cos\ \ A+B\ \ \right]$

$=2\sin C.\left[-2\sin A\sin\ \ -B\ \ \right]=4\sin A\sin B\sin C=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

b) $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A+\tan B=\tan A.\tan B.\tan C-\tan C$

$\Leftrightarrow\tan A+\tan B=\tan C\ \ \tan A\tan B-1\ \ \ \ *$

Do tam giác ABC không vuông nên $A+B\neq\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\tan A\tan B-1=\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}-1=\dfrac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}=-\dfrac{\cos\ \ A+B}{\cos A\cos B}\neq 0$

Suy ra $\ \ *\ \ \Leftrightarrow\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\tan C\Leftrightarrow\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C\Leftrightarrow\tan\ \ A+B\ \ =-\tan C$

Đẳng thức cuối đúng vì $A+B+C=\pi\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cot\ \ A+B\ \ =-\cot C$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot\ \ A+B\ \ =\frac{1}{\tan\ \ A+B}=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{1-\dfrac{1}{\cot A\cot B}}{\dfrac{1}{\cot A}+\dfrac{1}{\cot B}}=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

Suy ra $\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C\Rightarrow \cot A\cot B-1=-\cot C\ \ \cot A+\cot B$

Hay $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\cos A+\cos B+\cos C\leq \dfrac{3}{2}$

b) $\sin A+\sin B+\sin C\leq \dfrac{3\sqrt{3}}{3}$

c) $\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}$ với ABC là tam giác nhọn.

Lời giải

a) Ta có $\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos C$

Vì $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ nên $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$

Mặt khác $\cos C=1-2\sin^2\dfrac{C}{2}$ do đó

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=-2\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-2\left(\sin^2\frac{C}{2}-2\sin\frac{C}{2}.\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)+1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$=-2\left(\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}$$

Vì $\left|\cos\dfrac{A-B}{2}\right|\leq 1\Rightarrow \cos^2\dfrac{A-B}{2}\leq 1$ nên

$\cos A+\cos B+\cos C\le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\pi$ thì $\frac{\sin x+\sin y}{2}\le\sin\frac{x+y}{2}$.

Thật vậy, do $0\le\frac{x+y}{2}\le\pi\Rightarrow\sin\frac{x+y}{2}>0$ và $\cos\frac{x-y}{2}\le 1$ nên

$$\frac{\sin x+\sin y}{2}=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\le\sin\frac{x+y}{2}$$

Áp dụng bổ đề ta có: $\frac{\sin A+\sin B}{2}\le\sin\frac{A+B}{2}$, $\frac{\sin C+\sin\frac{\pi}{3}}{2}\le\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}$

Suy ra

$$\frac{\sin A+\sin B}{2}+\frac{\sin C+\sin\frac{\pi}{3}}{2}\le\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\le 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$$

Do đó $\sin A+\sin B+\sin C\le 3\sin\frac{\pi}{3}$ hay $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{3}$ ĐPCM.

c) Vì ABC là tam giác nhọn nên $\tan A>0$, $\tan B>0$, $\tan C>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$
Theo ví dụ 2 ta có $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ nên

$$\tan A\tan B\tan C\ge 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}\left(\sqrt[3]{\left(\tan A\tan B\tan C\right)^2}-3\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{\left(\tan A\tan B\tan C\right)^2}\ge 3\Leftrightarrow\tan A\tan B\tan C\ge 3\sqrt{3}$$ ĐPCM.

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A+\sin B+\sin C\le\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\tan A+\tan B+\tan C \ge \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$ Với tam giác ABC không vuông.

Lời giải

a) Vì $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}>0$ và $\cos\frac{A-B}{2}\le 1$ nên

$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{C}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sin B+\sin C\le 2\cos\frac{A}{2}$, $\sin C+\sin A\le 2\cos\frac{B}{2}$

Công vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$\sin A+\sin B+\sin C\le\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$. ĐPCM.

b) +TH1: Nếu tam giác ABC tù: không mất tính tổng quát giả sử $A>\frac{\pi}{2}\Rightarrow B<\frac{\pi}{2}, C<\frac{\pi}{2}$ suy ra

$\cos A<0$, $\cos B>0$, $\cos C>0$

$\cos A\cos B\cos C<0$. Mà $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$ do đó bất đẳng thức luôn đúng.

+ TH2: Nếu tam giác ABC nhọn: $\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$.

Vì $\cos(A+B)=-\cos C$ và $\cos(A-B)\le 1$ nên $\cos A\cos B\le\frac{1}{2}(1-\cos C)=\sin^2\frac{C}{2}$.

Chứng minh tương tự ta có $\cos B\cos C\le\sin^2\frac{A}{2}$, $\cos C\cos A\le\sin^2\frac{B}{2}$.

Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$(\cos A\cos B)(\cos B\cos C)(\cos C\cos A)\le\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ĐPCM.

c) Ta có $\tan A+\tan B=\frac{\sin\left(A+B\right)}{\cos A\cos B}=\frac{2\sin\left(A+B\right)}{\cos\left(A+B\right)+\cos\left(A-B\right)}$

Mà $\sin\left(A+B\right)=\sin C$, $\cos\left(A+B\right)=-\cos C$ nên

$$\tan A+\tan B=\frac{2\sin C}{-\cos C+\cos\left(A-B\right)}\ge\frac{2\sin C}{1-\cos C}=\frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}}=2\cot\frac{C}{2}$$

Tương tự ta có $\tan B+\tan C\ge 2\cot\frac{A}{2}$, $\tan C+\tan A\ge 2\cot\frac{B}{2}$

Công vế với vế và rút gọn ta được

$\tan A+\tan B+\tan C\ge\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$ ĐPCM.

Nhận xét:

+ Để chứng minh $x+y+z\ge a+b+c$ ta có thể đi chứng minh $x+y\ge 2a$ (hoặc $2b$, $2c$) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. Cộng vế với vế suy ra đpcm.

+ Để chứng minh $xyz\ge abc$ với x,y,z,a,b,c không âm ta đi chứng minh $xy\ge a^2$ (hoặc b^2, c^2) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. nhân vế với vế suy ra đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\le 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

b) $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\ge\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $x+y\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$ với mọi x,y không âm ta có

$$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}\le\sqrt{2\ \ \sin A+\sin B\ }=\sqrt{2.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\le 2\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}$$

Tương tự ta có $\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 2\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}$

Công vế với vế ta được $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 2\left(\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)$

Mà $\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\le 2\sqrt{\sin\left[\frac{A+B}{2}+\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\right]}=2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=2\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}$

Suy ra $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 4\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}$

Hay $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\le 3\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}=3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ĐPCM.

b) Ta có $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)=1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A\sin B}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với mọi x,y dương ta có

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\ge\frac{4}{\sin A+\sin B}=\frac{4}{2\sqrt{\sin A\sin B}}=\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}$$

Do đó $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\ge 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}+\frac{1}{\sin A\sin B}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2$

Mặt khác

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}\left[\cos\ \ A+B\ \ -\cos\ \ A-B\ \ \right]=\frac{1}{2}\left[\cos\ \ A+B\ \ +\cos\ \ A-B\ \ \right]$$

$$\ge\frac{\cos\ \ A+B\ \ +1}{2}=\sin^2\frac{A+B}{2}$$

Nên $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2$ (1)

Tương tự ta có $\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$ (2)

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

Ta lại có $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left[\frac{A+B}{2}+\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^2$

Suy ra $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^4$

Hay $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$ ĐPCM.

Nhận xét: Cho tam giác ABC và hàm số f

- Để chứng minh $f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh

$$f(A)+f(B)\geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

khi đó $f(C)+f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\geq 2f\left(\dfrac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)+f(B)+f(C)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 2\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right)+f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right]\geq 4f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

- Để chứng minh $f(A)f(B)f(C)\geq f^3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A)f(B)\geq f^2\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f(C)f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\geq f^2\left(\dfrac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)f(B)f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\geq f^4\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)f(B)f(C)\geq f^3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\cos\dfrac{A}{2}\cos(B-C)+\cos A\cos\dfrac{B-C}{2}=0$.

Chứng minh rằng $\cos 2B+\cos 2C\leq 1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\cos\frac{A}{2}\left(2\cos^2\frac{B-C}{2}-1\right)+\cos\frac{B-C}{2}\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)-\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1\right)=0\ (1)$$

Vì $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}>0$, $-\frac{\pi}{2}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{B-C}{2}>0$ và

$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$ nên $(1)\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=1\Leftrightarrow\sin B+\sin C=1$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2\ge\frac{\left(x+y\right)^2}{2}$ suy ra $\sin^2 B+\sin^2 C\ge\frac{\left(\sin B+\sin C\right)^2}{2}=\frac{1}{2}$

Do đó $\cos 2y+\cos 2z=2-2\left(\sin^2 y+\sin^2 z\right)\le 2-2.\frac{1}{2}=1$ ĐPCM.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải

Do A,B,C bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử $A\ge B\ge C\Rightarrow\frac{\pi}{2}>\frac{A}{2}\ge\frac{B}{2}\ge\frac{C}{2}>0$

Suy ra $\sin\frac{A}{2}\ge\sin\frac{B}{2}\ge\sin\frac{C}{2}>0,\cos\frac{A}{2}\ge\cos\frac{B}{2}\ge\cos\frac{C}{2}>0$

$$\Rightarrow\left(\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Do đó $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\le \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

Mà $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$\cos^2\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\ge 2\sqrt{\frac{3}{4}\cos^2\frac{B}{2}}=\sqrt{3}\cos\frac{B}{2},\ 3\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\ge 2\sqrt{3\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}}=2\sqrt{3}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Suy ra $2\left(\cos^2\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\right)+\left(3\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)\ge 2\sqrt{3}\cos\frac{B}{2}+2\sqrt{3}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

Hay $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\le\frac{3}{2}+3\left(\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)=\frac{9}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ĐPCM.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 6.58: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin C=\sin A.\cos B+\sin B.\cos A$

b) $\frac{\sin C}{\cos A.\cos B}=\tan A+\tan B\ (A,B\ne 90^0)$

c) $\cot B+\frac{\cos C}{\sin B.\cos A}=\cot C+\frac{\cos B}{\sin C.\cos A}\quad (A\ne 90^o)$

d) $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

e) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Bài 6.59: Cho tam giác ABC . Chứng minh:

a) $\tan A+\tan B+\tan C\ \ge 3\sqrt{3},\ \forall\Delta ABC$ nhọn

b) $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9, \forall \Delta ABC$ nhọn

c) $\tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C \geq 81, \forall \Delta ABC$ nhọn

d) $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$

e) $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

Bài 6.70: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$1 + \cos A \cos B \cos C \geq \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

Bài 6.71: Cho ΔABC. Chứng minh rằng $2\sin A + 3\sin B + 4\sin C \leq 5\cos\frac{A}{2} + 3\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$.

Bài 6.72: Cho ΔABC. Chứng minh rằng $x^2 - 2(\cos B + \cos C)x + 2 - 2\cos A \geq 0 \quad \forall x$.
Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 6.73: Cho ΔABC nhọn . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$(\tan B + \tan C)x^2 - 4x + 2\tan\frac{A}{2} \geq 0 \quad \forall x$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?